



ゲームプログラマのための数学の歩き方 - クォータニオンとリー群編

長谷川勇(スクウェア・エニックス)
朴炯基(九州大学)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所(IMI)



Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

2011年 アジア初の産業数学の研究所として創設

CG・ゲームとの関わり

- [研究集会](#)
 - デジタル映像表現のための数理的手法 (MEIS2014--2018)
 - CG技術の実装と数理2017 など
- [CEDEC x IMI コラボセッション](#)
 - 大規模グラフ解析と都市 OS の開発 (藤澤克樹, 2017年)
 - 暗号の安全性はどのように評価するのか (高木剛, 2016年)
 - データ解析における学習理論と統計学の特徴と生かし方 (西井龍映, 2015年)
 - CGにおける運動や変形の記述とその数理 (落合啓之, 2014年)
 - 行列の数理と運動の記述 (落合啓之, 2013年)
- [スクエニ x IMI @ CEDEC](#)
 - ゲームプログラマのための数学の歩き方
- ラプラシアン編 (長谷川勇, 太田友, 2020年)
- クォータニオンとリー群編 (長谷川勇, 朴炯基, 2021年)
- デュアルクォータニオン編 (長谷川勇, 鍛冶静雄, 落合啓之, 2021年)

活動

- [ワークショップ](#)
- チュートリアル
- [技術相談 \(AIMaP\)](#)
- [共同研究](#)
- [インターンシップ](#)
- [国際交流 \(APCMfi\)](#)
- [IMI宣言2021](#)



Outline

- 導入：「ゲームプログラマのための数学の歩き方」でやりたいこと
- 課題
 - クォータニオンの導入
 - 気持ち悪さ
- 解決編
 - リー群とリー環
 - 三次元回転とクォータニオン
 - クォータニオンのサンドイッチ作用

次はラプラス作用素を調べると

- 増えていくワード
 - 多様体
 - テンソル
 - 外微分
 - ホッジ双対
 - ...

出典: <https://ja.wikipedia.org>

ホツジ双対？

数学において、**ホッジスター作用素**(ホッジスターさようそ、Hodge star operator)、もしくは、**ホッジ双対**(ホッジそうつい、Hodge dual)は、**ウィリアム・ホッジ**により導入された**線型写像**である。ホッジ双対は、有限次元の**向き付けられた内積空間**の**外積代数**の上で定義される k -ベクトルのなす空間から $n-k$ -ベクトルのなす空間への**線形同型**である。

他のベクトル空間に対する多くの構成と同様に、ホッジスター作用素は多様体上のベクトルバンドルへの作用に拡張することができる。たとえば余接束の外積代数（すなわち、多様体上の微分形式の空間）に対して、ホッジスター作用素を用いてラプラス＝ド・ラーム作用素を定義し、コンパクトなリーマン多様体上の微分形式のホッジ分解を導くことができる。

- 外積代数
- ベクトルバンドル
- 微分形式
- ...

出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/ホッジ双対>



© 2020 Kyushu University / SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights Reserved.

CEDEC2020

引用: <https://cedec.cesa.or.jp/2020/session/detail/s5e79a3e9c953a.html>

CEDEC2020「ゲームプログラマのための数学の歩き方-ラプラシアン編」



解決したい課題：数学の行間

行間を読むのが難しい(球面調和関数)

調和多項式 p が k 次の斉次多項式であるとき、 p を単位球面

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$$

に制限した制限写像

$$Y = p|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$$

を k 次の球面調和関数という[5]。

3次元空間における球面調和関数 [編集]

3次元空間 $\mathbf{R}^3$ の場合、 $\mathbf{R}^3$ を球面座標 (r, θ, ϕ) で表すと、下記の $Y_k^m(\theta, \phi)$ が球面調和関数になる事が知られている。

$$Y_k^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}} P_k^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (B1)$$



出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/球面調和関数>

© 2020 Kyushu University / SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights Reserved.

CEDEC2020

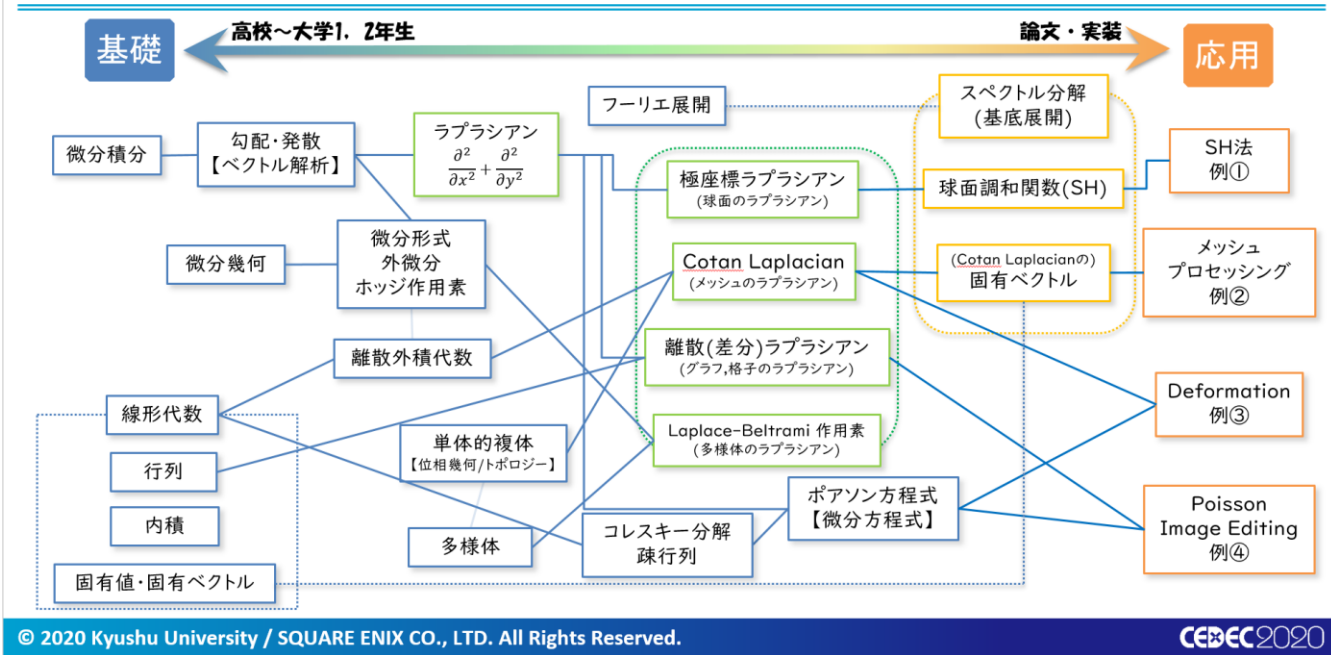


引用: <https://cedec.cesa.or.jp/2020/session/detail/s5e79a3e9c953a.html>

CEDEC2020「ゲームプログラマのための数学の歩き方 - ラプラシアン編」

解決策：ロードマップ

ロードマップ【高校数学～ラプラシアン】



SHIFT YOUR
PARADIGM

引用: <https://cedec.cesa.or.jp/2020/session/detail/s5e79a3e9c953a.html>

CEDEC2020「ゲームプログラマのための数学の歩き方 - ラプラシアン編」

解決策：ラプラシアンの「心」

ラプラシアンとは？

【答えの一例】

いろいろな場所(定義域)で
フーリエ展開をするために必要なもの

(今回の講演では)



ラプラシアンの「心」

© 2020 Kyushu University / SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights Reserved.

CEDEC2020



引用: <https://cedec.cesa.or.jp/2020/session/detail/s5e79a3e9c953a.html>
CEDEC2020「ゲームプログラマのための数学の歩き方 - ラプラシアン編」

© 2021 Kyushu University / SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights Reserved.

CEDEC2021

クォータニオンの導入

- クォータニオンは次で定義される

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (q_0, q_1, q_2, q_3 \text{ は実数})$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$



(x軸周りの)回転行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 3次元座標の任意軸回転を表せる

- 3次元ベクトル (p_1, p_2, p_3) を $p = p_1i + p_2j + p_3k$

- 長さ1の (w_1, w_2, w_3) を回転軸とする角度 θ の回転

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + (w_1i + w_2j + w_3k) \sin \frac{\theta}{2}$$

- p を q で回転するには $p' = qpq^{-1}$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

クォータニオンの導入(プログラマ観点)

- 3次元座標の任意軸回転
- クォータニオンによる回転(DirectXMath)

```
XMVECTOR q = XMQuaternionRotationRollPitchYaw(pitch, yaw, roll);  
XMVECTOR vout = XMVector3Rotate(vin, q);
```

– 回転行列と同じように使える

```
XMMATRIX mat = XMMatrixRotationRollPitchYaw(pitch, yaw, roll);  
XMVECTOR vout = XMVector3Transform(vin, mat);  
...  
XMVECTOR q = XMQuaternionRotationMatrix(mat); // 回転行列から変換  
XMMATRIX m = XMMatrixRotationQuaternion(q); // 回転行列へ変換
```



クォータニオンの導入(メリット)

- データサイズが小さい
 - 回転行列: 3×3 (あるいは 4×4)行列
 - クォータニオン: Vector4
- (回転操作自体の)計算量が少ない
- (オイラー角の)ジンバルロックがない
- 球面線形補間が簡単

```
XMVECTOR q = XMQuaternionSlerp(q0, q1, t);
```

その他の回転表現

- 回転行列
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$
- オイラー角
 - z-y-x系オイラー角(ロール・ピッチ・ヨー角)など
- 角軸ベクトル(axis-angle, 回転ベクトル)
 - (OpenGL)glRotatef(angle,x,y,z)
(x,y,z)を回転軸としてangle回転



クォータニオンと指数関数/対数関数

イントロ3 - クォータニオンの対数と指数



- D3DXQuaternionLn
- D3DXQuaternionExp
 - 2つとも XNA framework には非実装
- ゲーム3D数学(O'Reilly) 9.4.11節
 - “...直接使われることは滅多にないものの...”

これを使わないなんて とんでもない！

©2010 SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights reserved.

9

Exponential map (Expmap)

回転

方向



$$\log(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} e_X & e_Y & e_Z \end{bmatrix}$$

↑
クォータニオン

(仮名: 対数クォータニオン)

クォータニオンへの変換式

$$\mathbf{q} = \exp \begin{bmatrix} e_X & e_Y & e_Z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e_X}{\theta} \sin \theta & \frac{e_Y}{\theta} \sin \theta & \frac{e_Z}{\theta} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\theta = \sqrt{e_X^2 + e_Y^2 + e_Z^2}$$

©2010 SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights reserved.

23



引用: http://cedec.cesa.or.jp/2010/program/PG/C10_P0036.html

CEDEC2010「3次元回転を極める ～ 一歩進んだキャラクターアニメーションプログラミング～」

クォータニオンと指数関数/対数関数

Exponential map のイメージ図

回転

方向

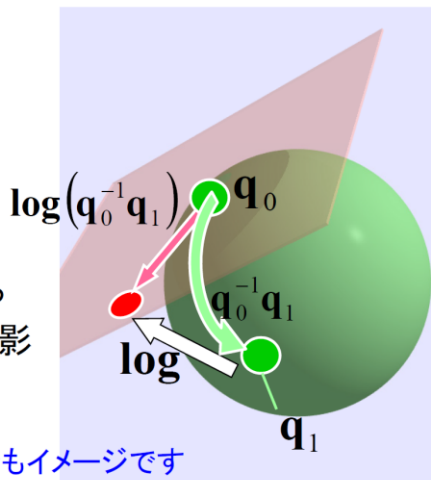


$\log(\text{回転})$

球面上の回転移動の
2次元平面への投影

3次元回転の場合...

クォータニオン(4D)から
3次元線形空間への投影



※あくまでもイメージです

©2010 SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights reserved.

24

回転の合成に伴う誤差



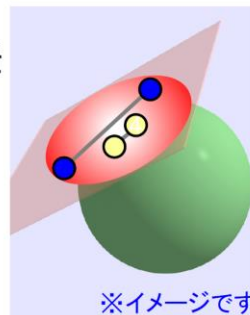
- 加算による回転合成の近似

$$\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 \approx \exp \{ \log(\mathbf{q}_0) + \log(\mathbf{q}_1) \}$$

クォータニオンの乗算

Expmapの加算

- 合成の誤差



※イメージです

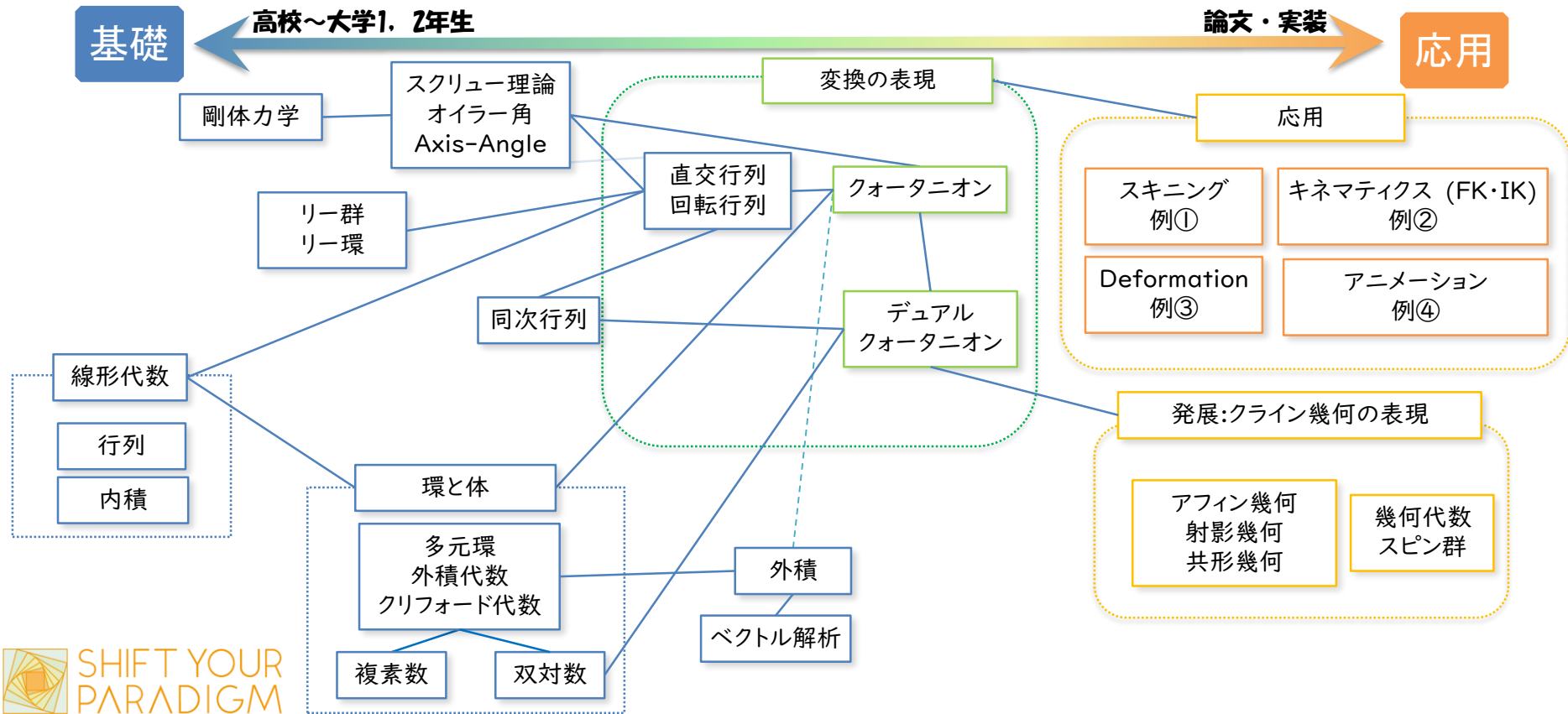
©2010 SQUARE ENIX CO., LTD. All Rights reserved.

25

気持ち悪さ

- なぜクォータニオンで回転を表せる？
- なぜ4パラメータ？（オイラー角は3つ）
- なぜ qpq^{-1} ？（回転行列は単に行列とベクトルの乗算）
- なぜ $\frac{\theta}{2}$ 回転？
- クォータニオンや行列の指数（対数）関数とは？

ロードマップ【高校数学～デュアルクォータニオン】



クォータニオンの「心」

複素数平面とクォータニオンは同じ仲間
その心を知ればどの技術も同じ発想で生まれることが分かる！

数によって変換を表す

- メリット1：行列より軽くて計算量も少ない
- メリット2：作用する側も作用される側も同じ数で表せる
- メリット3：ジンバルロックが起こらない
- メリット4：補間が簡単（球面線形補間）

後半のアウトライン

後半でやりたいこと：クォータニオンが3次元回転を表すことの数学的な背景を
考え方を中心に説明する

- リー群とリー環
- 3次元回転とクォータニオン
- クォータニオンのサンドイッチ作用

後半のアウトライン

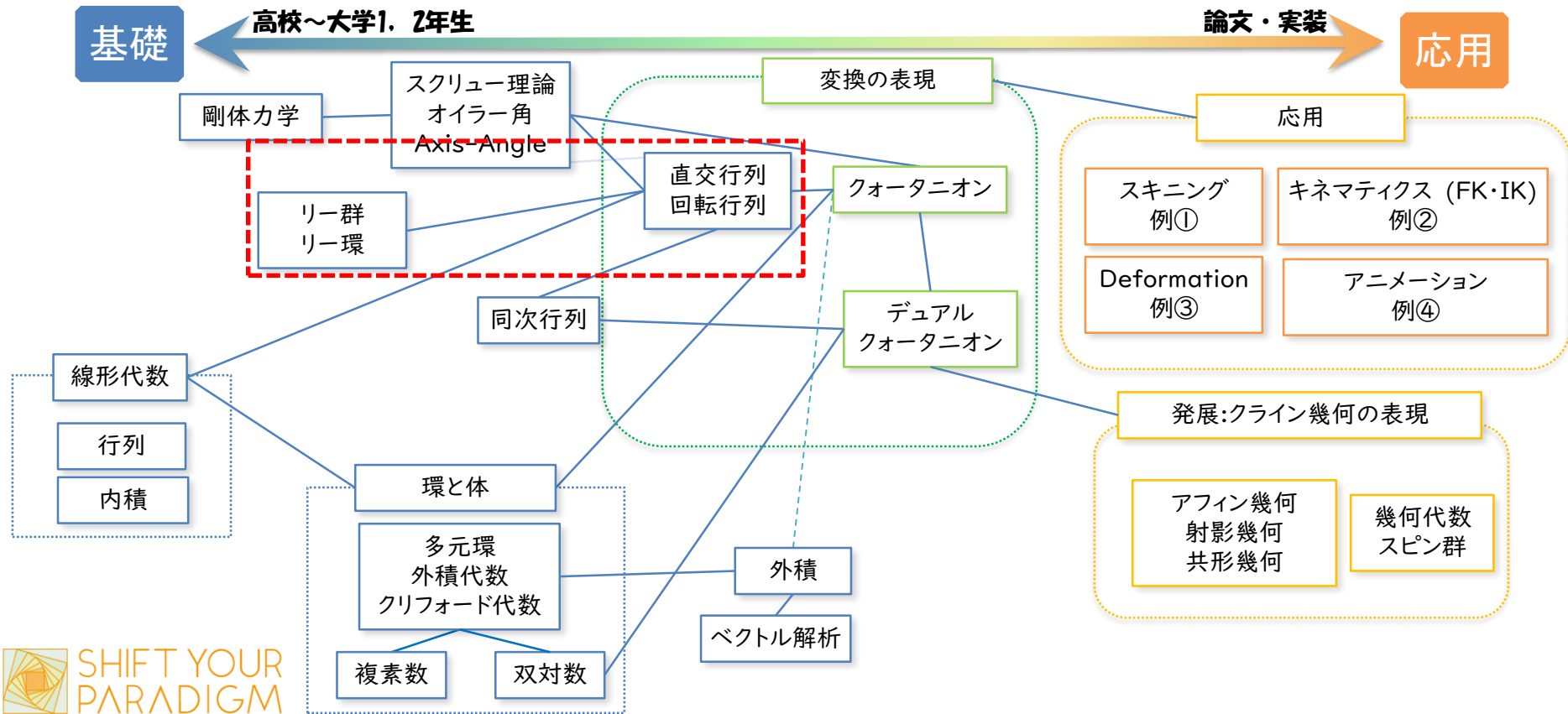
この講演の背景になるリー群の理論を、回転行列を用いて説明

➤ リー群とリー環

➤ 三次元回転とクォータニオン

➤ クォータニオンのサンドイッチ作用

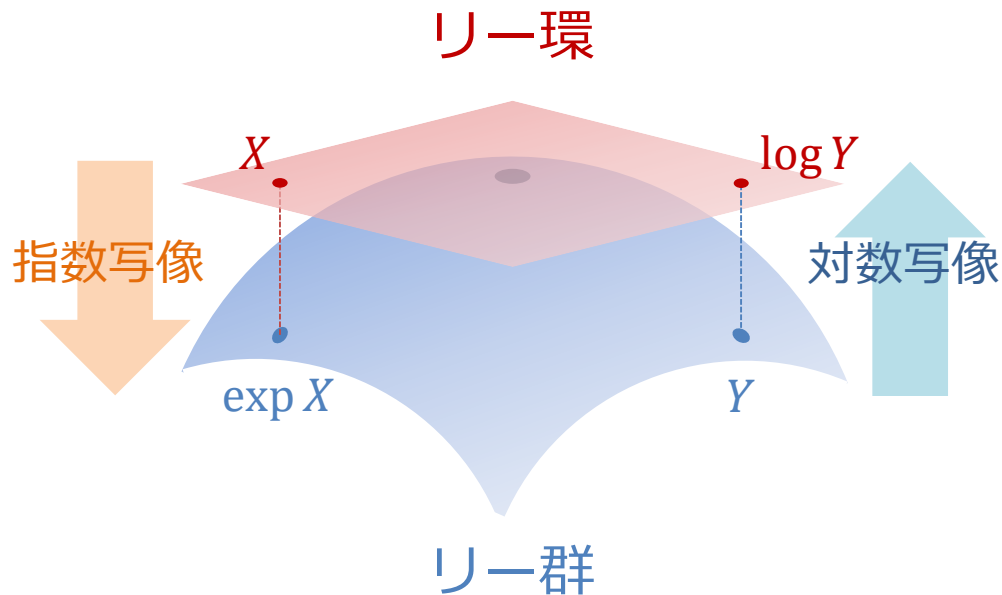
ロードマップ【高校数学～デュアルクォータニオン】



リー群、リー環の概要

このチャプターで知りたいこと

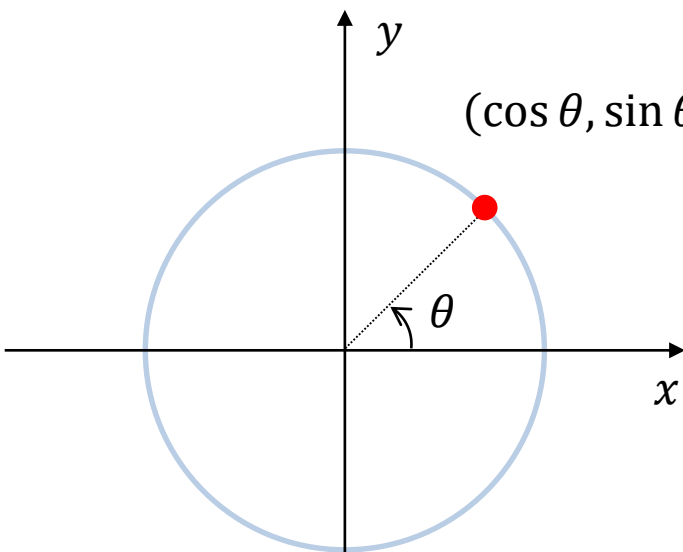
- 回転行列をリー群として考える
- 回転行列で、リー群とリー環の関係を見る
- 行列指数(対数)関数



リー群とリー環のイメージ

二次元回転とリー群、リー環

二次元回転行列 $SO(2)$ とリー群、リー環



$$S^1: x^2 + y^2 = 1$$



SHIFT YOUR
PARADIGM

絵で表せるのがリー群になる主要な条件

対応

$$(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

二次元回転行列は一つのパラメータ θ で考えられる

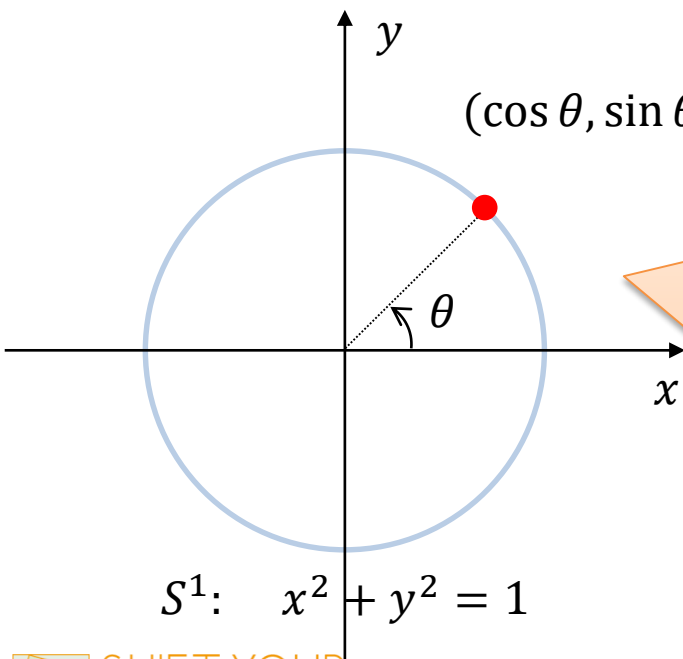
Ex 1) 30° 回転かつ 50° 回転は
二つの回転行列を合成してみなくても、 $30+50=80^\circ$

Ex 2) 同様に3回の 30° 回転
は、 $3*30=90^\circ$

n 次元回転行列の集合は $SO(n)$ と書く：
直交行列とも呼ぶ

二次元回転とリー群、リー環

二次元回転行列SO(2)とリー群、リー環



対応
 $(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$$

SO(2) : リー群 (二次元回転行列)

演算 : 行列の掛け算

二次元回転行列は一つのパラメータ θ で考えられる

Ex 1) 30°回転かつ50°回転は
二つの回転行列を合成してみなくても、 $30+50=80^\circ$

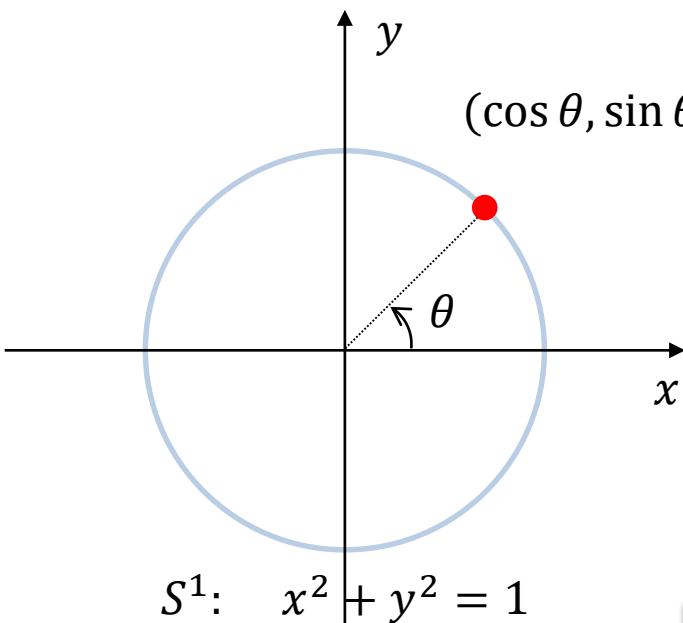
$\mathfrak{so}(2)$: リー環 (線形パラメータ θ)

演算 : θ の足し算とスカラー乗法 (線形的)

Ex 2) 同様に3回の30°回転は、 $3*30=90^\circ$

二次元回転とリー群、リー環

二次元回転行列 $SO(2)$ で見るリー群とリー環の関係



$(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$

$30 + 50 \rightarrow R(30)R(50)$
リー環 リー群

$$\exp(30 + 50) = \exp(30) \exp(50)$$

$\rightarrow \exp(\theta) \mapsto R(\theta)$ であると、 $R(80) = R(30)R(50)$

一般的なリー群、リー環にも同じ関係がある

二次元回転とリー群、リー環

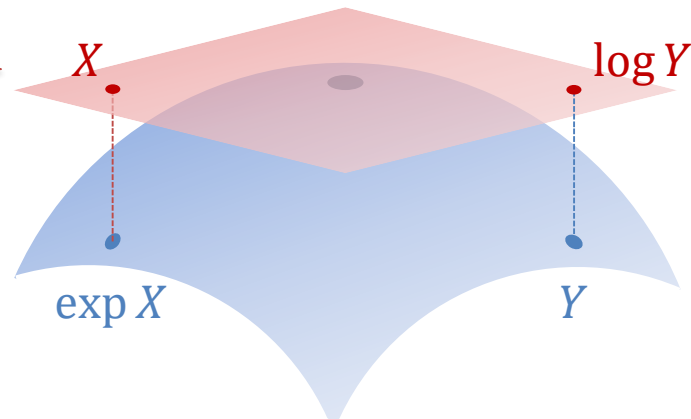
二次元回転行列SO(2)とリー群、リー環

リー環は接空間になる

リー環: $\mathfrak{so}(2) = \left\{ \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

指数写像

行列に指数写像?



対数写像

リー群: $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

行列指数関数

$\exp x$ のテイラー展開(x は実数)

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$\exp A$ のテイラー展開(A は行列)

$$\exp A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\exp\left(\theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^3 \dots$$

$$\exp(\text{リー環の元}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \cdot \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \theta^3 \\ -\theta^3 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots & -\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \end{pmatrix}$$

$$= E \cos \theta + I \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

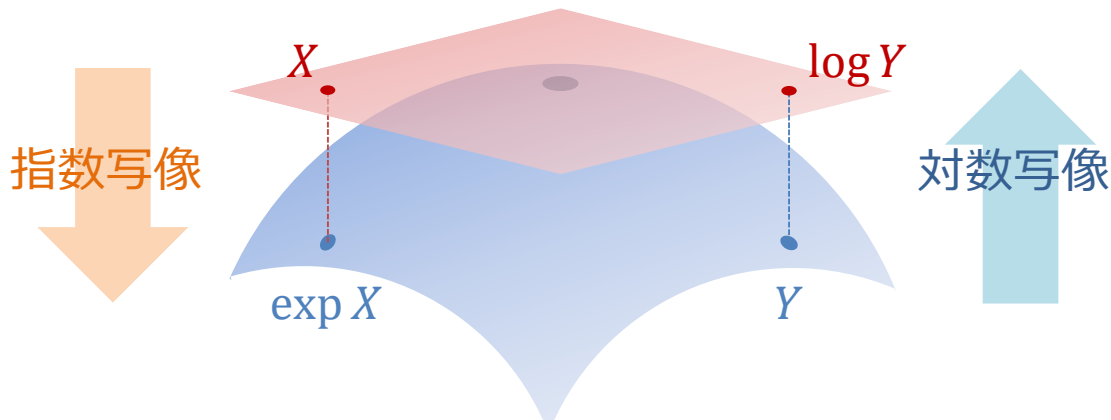
リー群の元

二次元回転とリー群、リー環

二次元回転行列SO(2)とリー群、リー環まとめ

- 二次元回転行列をリー群として考えるとそのリー環が得られる
- リー環では、リー群での演算を線形的に（足し算とスカラー乗法）具現できる
- リー環の元からの指数写像をとるとリー群の元になる

リー環: $\mathfrak{so}(2) = \left\{ \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$



リー群: $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

三次元回転とリー群、リー環

三次元回転行列SO(3)とリー群、リー環

三次元回転はパラメータ
が三つ必要

ベクトル(長さ1) $w = (w_1, w_2, w_3)$
と実数 θ に対して

$$\theta(w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3) \in \mathfrak{so}(3)$$

指数写像

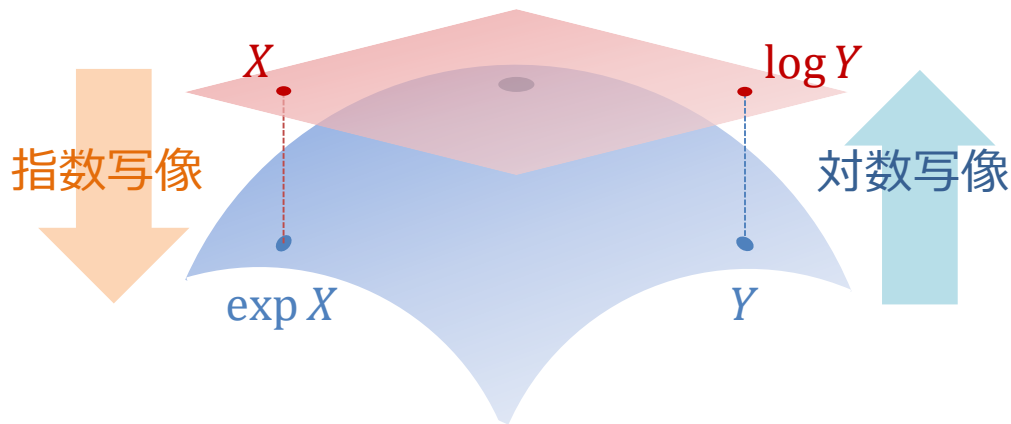
$w = (w_1, w_2, w_3)$ を回転軸とする角
度 θ の三次元回転行列になる

Axis-Angle



$$\mathfrak{so}(3) = \{t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3 | t_i \in \mathbb{R}\}$$

リー環: $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

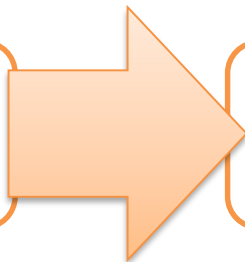


リー群: $SO(3) = \{R \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) | RR^T = E, \det R = 1\}$
三次元回転行列

Remark: 行列指数関数

$\exp x$ のテイラー展開(x は実数)

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$



$\exp A$ のテイラー展開(A は行列)

$$\exp A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix} \middle| t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp(A) = E + \frac{\sin|t|}{|t|}A + \frac{1 - \cos|t|}{|t|^2}A^2, \quad |t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$$

ロドリゲスの回転公式

Remark: リー群

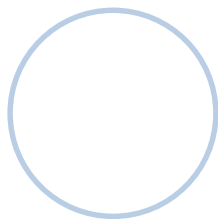
群：乗除がうまく定義できる集合

$$SO(2)の乗算： \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) & -\sin(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) & \cos(\theta + \psi) \end{pmatrix}$$

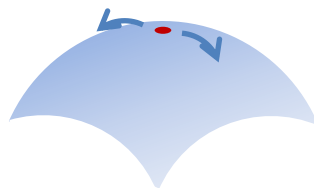
$$SO(2)の除算： \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

リー群：幾何学的に滑らかな構造を持っている群

群とリー群いずれも厳密な定義ではなく、ただのこの講義での認識です！



二次元回転
 $SO(2)$



三次元回転
 $SO(3)$ (イメージ)

Remark: リー環 (リー代数)

回転行列(リー群) G が 1° 回転なら、 G^2 は 2° 回転、 G^θ は θ° 回転

$$G^\theta = \exp(\log G^\theta) = \exp(\theta \log G) \rightarrow \theta X$$

- 回転 G に関する線形的な計算が可能
- $\exp$ を通じて元の回転行列に戻る



集合 $\{\theta X | \theta \in \mathbb{R}\}$

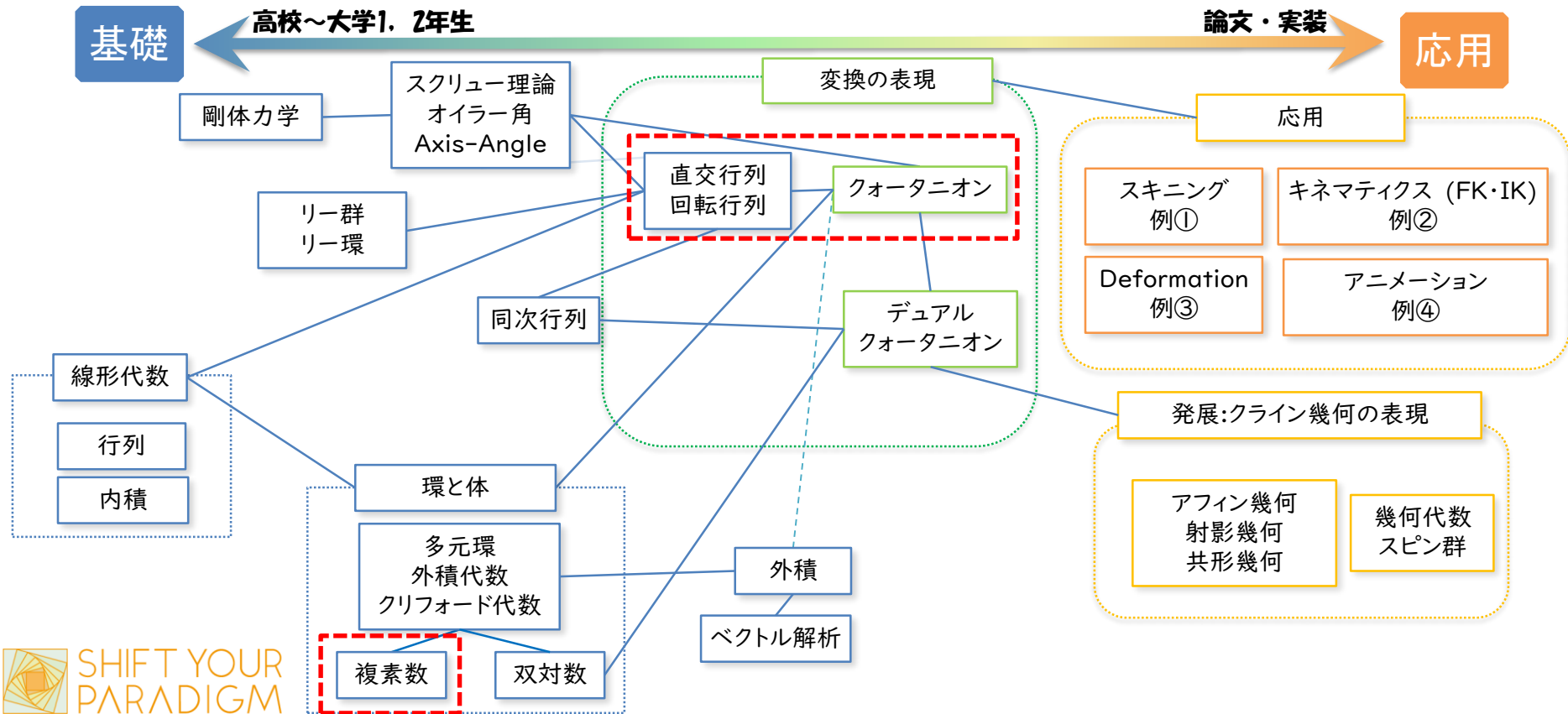
あるリー群 G が与えられたとき、あらゆる実数 t に対して $\exp(tX) \in G$ となるような X の集合を G に付随するリー環 (リー代数) と呼ぶ

後半のアウトライン

複素数との類似性からクォータニオンが三次元回転を表すことを説明

- リー群とリー環
- 三次元回転とクォータニオン
- クォータニオンのサンドイッチ作用

ロードマップ【高校数学～デュアルクォータニオン】



複素数平面とクォータニオン

このチャプターで知りたいこと

複素数

単位複素数

リー群 $SO(2)$ (二次元回転行列)

純虚数

リー環 $\mathfrak{so}(2)$

クォータニオン

単位クォータニオン

リー群 $SU(2)$

リー群 $SO(3)$ (三次元回転行列)

純クォータニオン

リー環 $\mathfrak{su}(2)$

リー環 $\mathfrak{so}(3)$ (三次元ベクトル)

クォータニオンで三次元回転を表すには一回他のリー群を経由する必要がある：
角度が二倍になったり、サンドイッチ作用が必要であったりなどの不思議なことが起こる原因

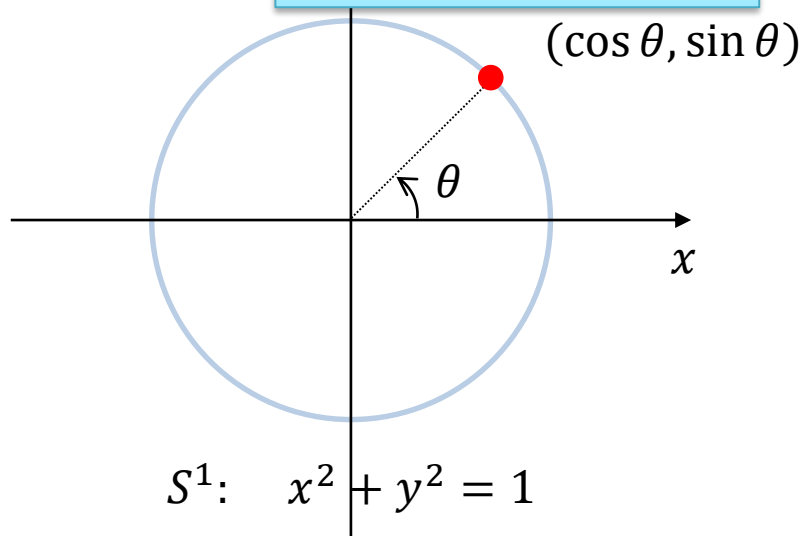


PARADIGM

複素数平面とSO(2)

SO(2)と複素数平面の対応関係

二次元座標も複素数
も二つの実数の組



$$\cos \theta + i \sin \theta \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

二次元回転は単位複素数
(長さ1)で表せる

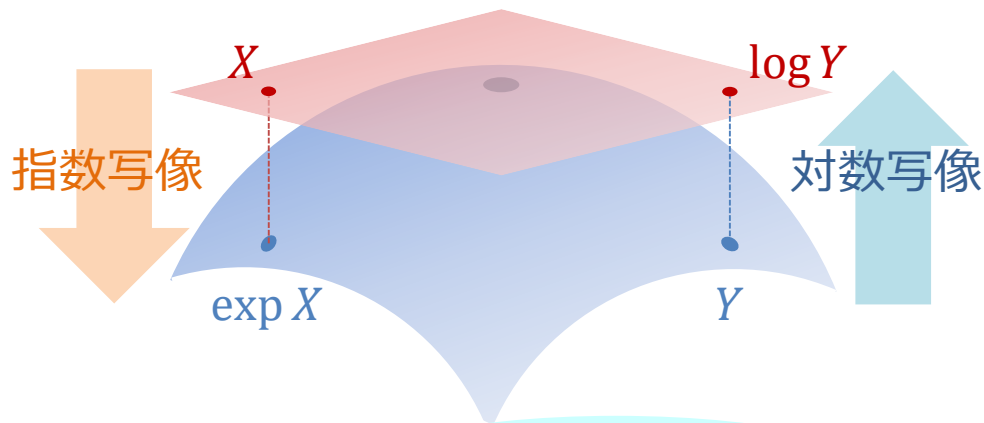
$$\mathfrak{so}(2) = \{\theta \cdot I \mid \theta \in \mathbb{R}\}, I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^2 = -E$$

- I : 複素数の行列表現
- $\mathfrak{so}(2)$: 純虚数

複素数平面とSO(2)

SO(2)と複素数の関係の図式

リー環: $\mathfrak{so}(2) = \left\{ \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$



リー群: $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$



純虚数
 $i\theta \ (\theta \in \mathbb{R})$

指数写像 対数写像

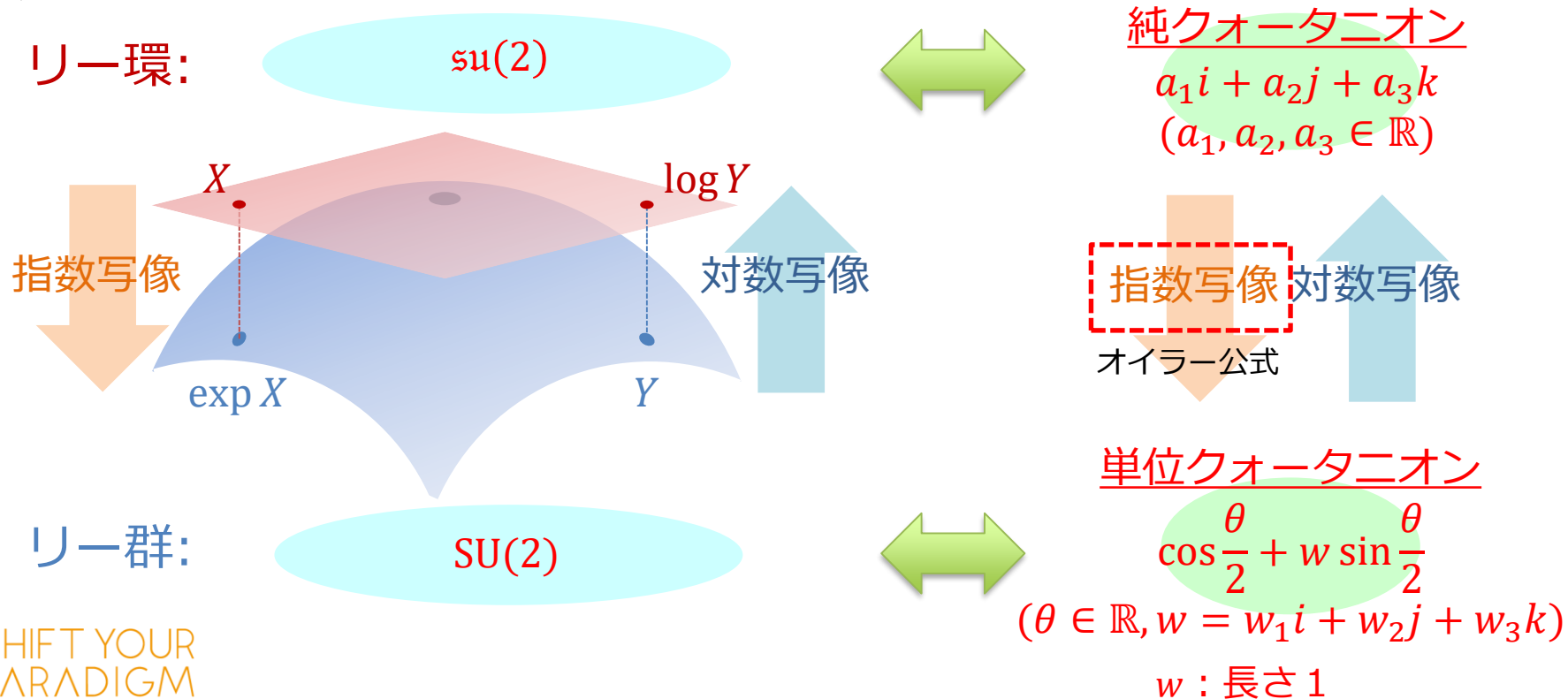
$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$
オイラー公式



単位複素数
 $\cos \theta + i \sin \theta$
 $(\theta \in \mathbb{R})$

クォータニオンとSU(2)

SU(2)とクォータニオンの関係の図式



クォータニオンとSU(2)

クォータニオンの行列表現

$$\mathrm{SU}(2) = \{a_0 E + a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 \mid a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{su}(2) = \{a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 \mid a_i \in \mathbb{R}\},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$U_i^2 = -E, \quad U_1 U_2 = U_3, \quad U_2 U_3 = U_1, \quad U_3 U_1 = U_2$$



$$E \rightarrow 1, \quad U_1 \rightarrow i, \quad U_2 \rightarrow j, \quad U_3 \rightarrow k$$

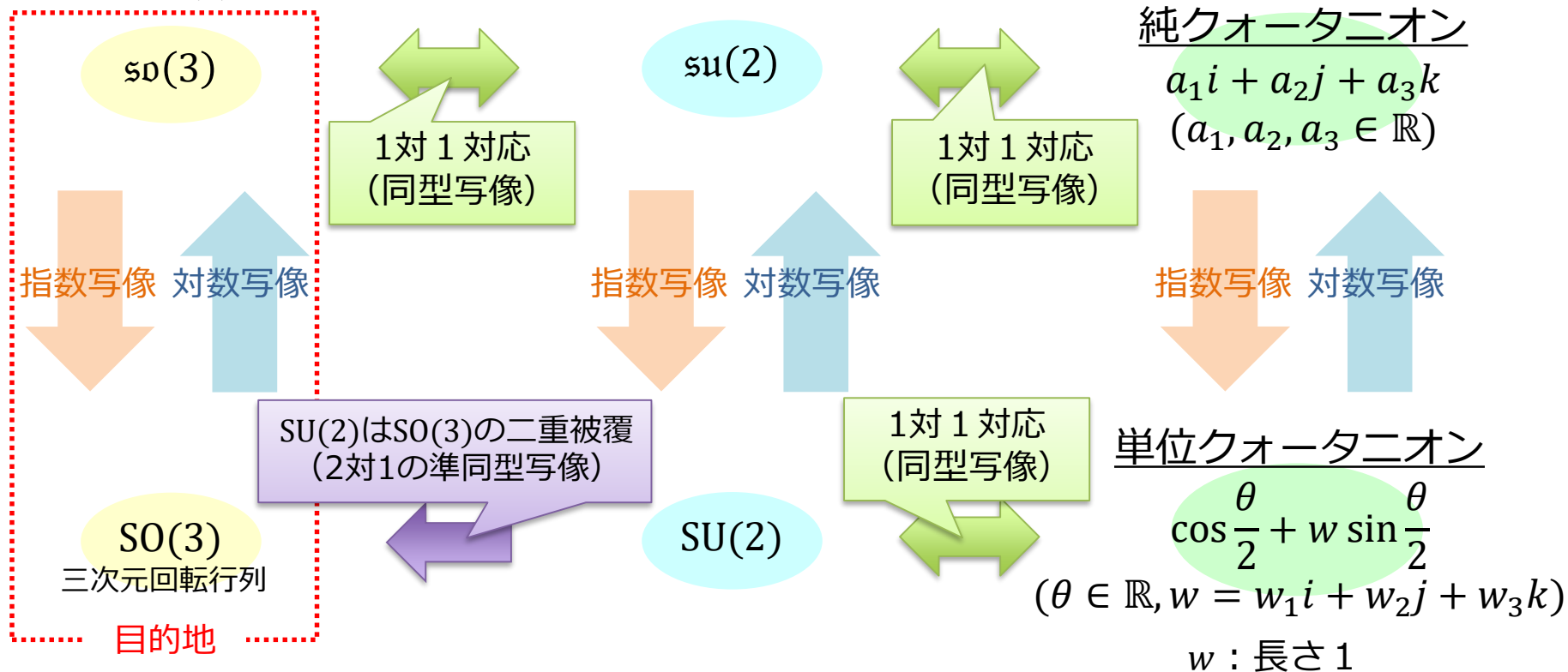
$\mathrm{SU}(2)$  単位クォータニオン

$\mathfrak{su}(2)$  純クォータニオン



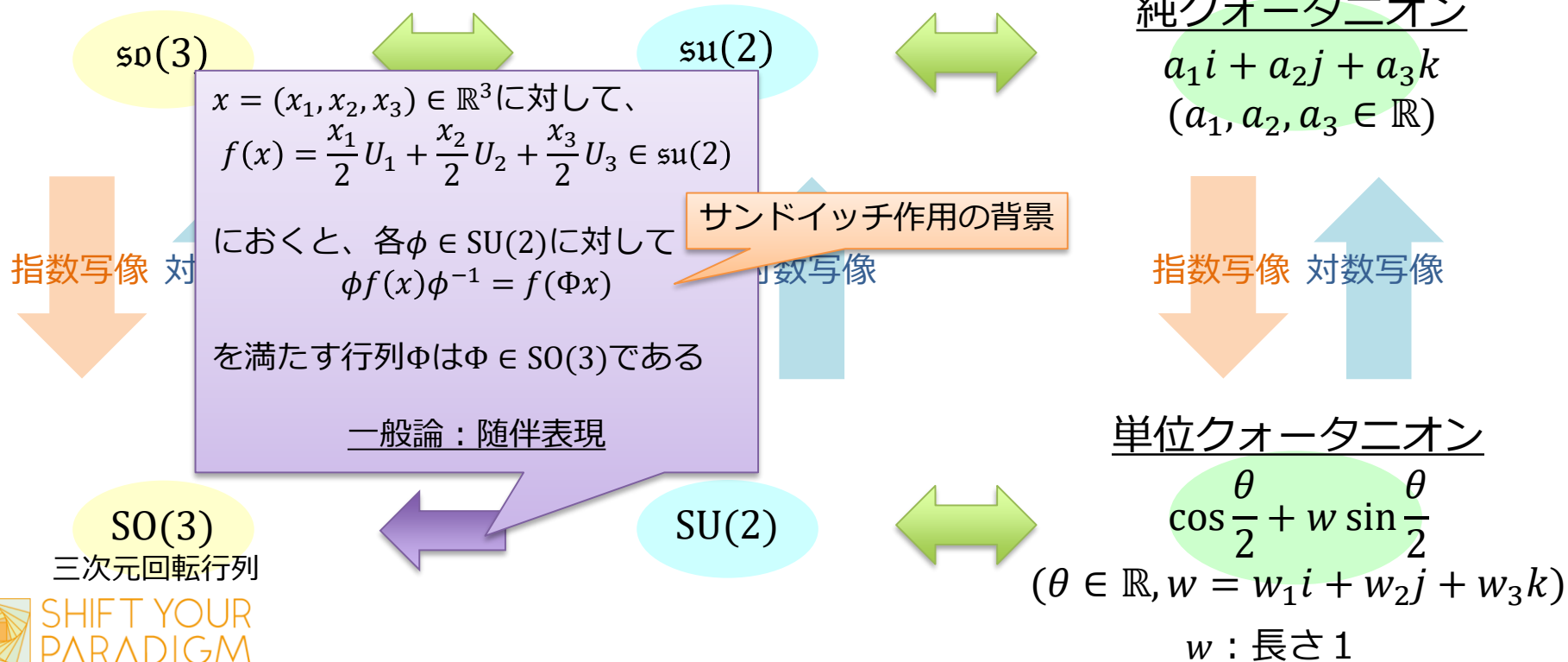
クォータニオンとSU(2)

SU(2)とSO(3)とクォータニオンの関係の図式



クォータニオンとSU(2)

SU(2)とSO(3)とクォータニオンの関係の図式



複素数平面とクォータニオン

このチャプターのまとめ

複素数

単位複素数

リー群 $SO(2)$ (二次元回転行列)

純虚数

リー環 $\mathfrak{so}(2)$

クォータニオン

単位クォータニオン

リー群 $SU(2)$

リー群 $SO(3)$ (三次元回転行列)

純クォータニオン

リー環 $\mathfrak{su}(2)$

リー環 $\mathfrak{so}(3)$ (三次元ベクトル)

二次元回転は複素数で、三次元回転はクォータニオンで表せるが、クォータニオンの場合、 $SU(2)$ を経由する必要がある、 $SU(2)$ と $SO(3)$ の関係に従って三次元回転を表す



クォータニオンの「心」

複素数平面とクォータニオンは同じ仲間
その心を知ればどの技術も同じ発想で生まれることが分かる！

数によって変換を表す

- メリット1：行列より軽くて計算量も少ない
- メリット2：作用する側も作用される側も同じ数で表せる
- メリット3：ジンバルロックが起こらない
- メリット4：補間が簡単（球面線形補間）

クォータニオンのメリット

三次元回転行列の場合

回転行列 ベクトル

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

作用 対象

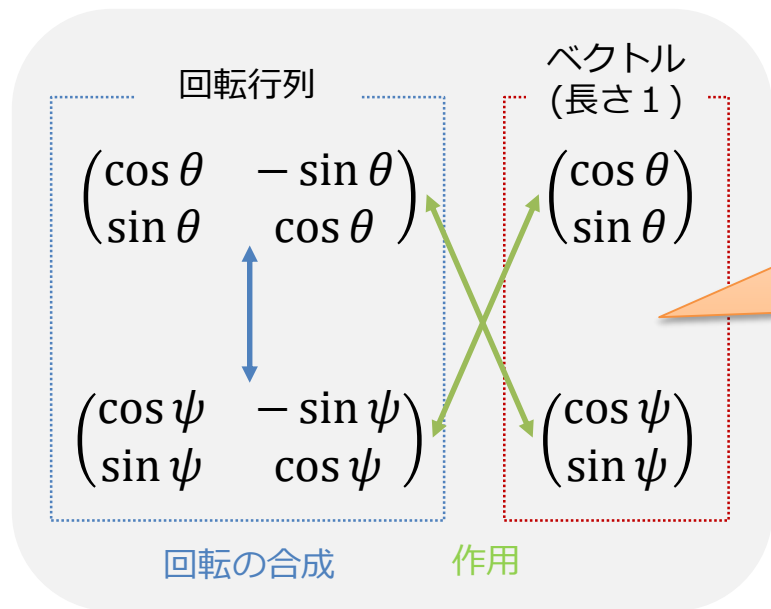
作用する側もされる側も同じ数として計算できる！

作用と元に対する異なるデータセットが必要

クォータニオンは両方表せる

クォータニオンのメリット

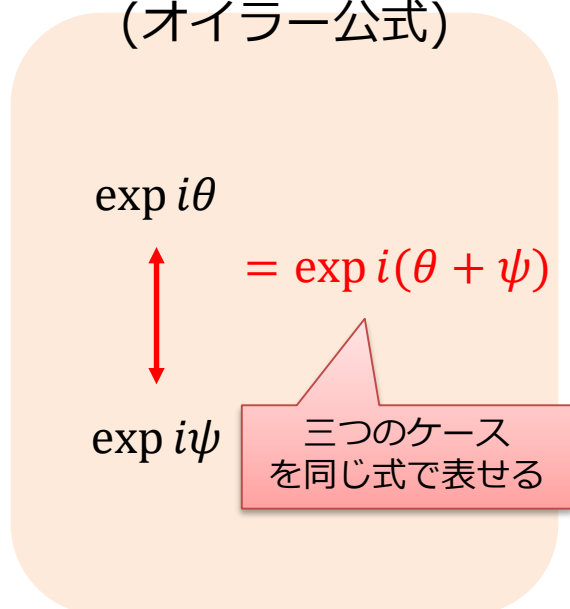
二次元回転



- 回転の合成
- 各ベクトルの回転 (回転の作用)

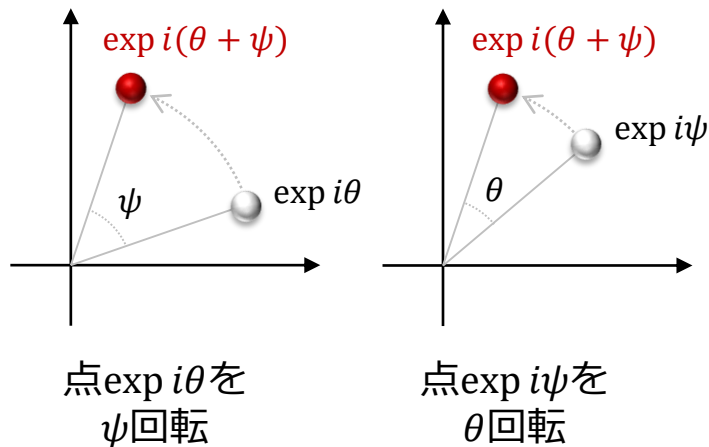
三つのケースを異なる式で表す

複素数 (オイラー公式)

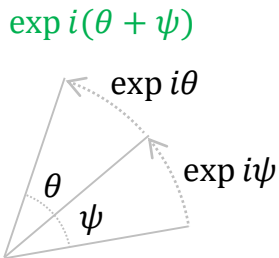


クォータニオンのメリット

作用対象
(ベクトル)



作用
(回転行列)



回転の合成

複素数
(オイラー公式)

$$\exp i\theta \quad \updownarrow \quad \exp i\psi = \exp i(\theta + \psi)$$

三つのケース
を同じ式で表せる

三次元回転をクォータニオンで
表しても同じ利得

Remark: $SU(2)$ と $SO(3)$

$SO(3)$ のリー環 :

$$\mathfrak{so}(3) = \{t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3 \mid t_i \in \mathbb{R}\}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[X, Y] = XY - YX \text{と書くと、} [X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_1, [X_3, X_1] = X_2$$

交換子積と呼ぶ

$\mathfrak{so}(3)$ の重要な構造

残念ながら、複素数のように簡単に $X_1 \rightarrow i$, $X_2 \rightarrow j$, $X_3 \rightarrow k$ にはならない

$$\text{例えば、} X_1^2 \neq -E$$

$$[i, j] = 2k$$

Remark: $SU(2)$ と $SO(3)$

では三次元回転をクォータニオンでうまく表現するためには？

$$A, B \in \mathfrak{so}(3) \quad \begin{cases} A = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\ B = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \end{cases}$$

少なくとも何を満たさなければいけないのか？

三次元回転行列

$$\boxed{\exp(A) \exp(B)} = \exp(C)$$

$$\boxed{q_A q_B} = q_C$$

q_A と q_A を掛けた q_C が
 $\exp(C)$ を表すクォータニオンにならなければいけない

回転行列 $\exp(A)$ 、 $\exp(A)$
を表すクォータニオン

Remark: $SU(2)$ と $SO(3)$

では三次元回転をクォータニオンでうまく表現するためには？

$$A, B \in \mathfrak{so}(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\ B = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \end{array} \right.$$

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(C)$$

Baker-Campbell-Hausdorffの公式

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \dots$$

- $[A, B] = AB - BA = 0$ であれば、 $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$
- 交換子積の計算ルールが同じであれば X_1, X_2, X_3 をうまく表現可能

Remark: $SU(2)$ と $SO(3)$

では三次元回転をクォータニオンでうまく表現するためには？

$$A, B \in \mathfrak{so}(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3, \\ B = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \end{array} \right.$$

$$X_1 \rightarrow \frac{i}{2}, \quad X_2 \rightarrow \frac{j}{2}, \quad X_3 \rightarrow \frac{k}{2} \quad : \quad \text{同じ交換子積の計算ルールを持つ}$$

$$\text{計算例: } \left[\frac{i}{2}, \frac{j}{2} \right] = \frac{ij}{4} - \frac{ji}{4} = \frac{k}{2}$$

純クォータニオン

$$\mathfrak{so}(3) = \{t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3 \mid t_i \in \mathbb{R}\} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{su}(2) = \{t_1 i + t_2 j + t_3 k \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

交換子積以外は違う計算ルールを持つ

Remark: SU(2)とSO(3)

では三次元回転をクォータニオンでうまく表現するためには？

回転軸(長さ1) : $w = (w_1, w_2, w_3)$ 、回転角度 : θ の回転行列

$$\exp(\theta \underbrace{(w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3)}_{\text{so(3)の元}}) \quad \longrightarrow \quad \exp\left(\frac{\theta}{2} \underbrace{(w_1 i + w_2 j + w_3 k)}_{\text{su(2)の元}}\right)$$

$$\exp\left(\frac{\theta}{2} (w_1 i + w_2 j + w_3 k)\right) = \cos \frac{\theta}{2} + (w_1 i + w_2 j + w_3 k) \sin \frac{\theta}{2}$$

交換子積以外の i, j, k
の計算ルールが必要

$$= \cos \frac{\theta}{2} + w \sin \frac{\theta}{2}$$

- 単位クォータニオンが三次元回転を表す
- su(2)に対するリー群 : SU(2)

後半のアウトライン

クォータニオンのサンドイッチ作用の原理を説明

- リー群とリー環
- 三次元回転とクォータニオン
- クォータニオンのサンドイッチ作用

サンディッチ作用の原理

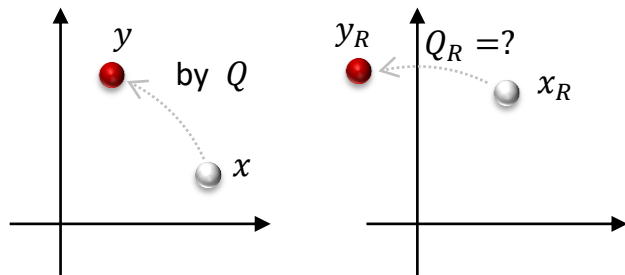
三次元回転行列の座標変換

$Q = \exp(\theta(w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3))$: 回転軸 $w = (w_1, w_2, w_3)$ 、回転角度 θ

ある点 x が Q によって y に回転されるとき、別の回転行列 R で座標変換すると？

$$y = Qx \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} y_R = Ry \\ x_R = Rx \end{cases} \quad \longrightarrow \quad y_R = \overset{\text{どうなる?}}{Q_R} x_R$$

$$y_R = Ry = RQx = RQR^{-1}Rx = \mathbf{RQR^{-1}}x_R$$



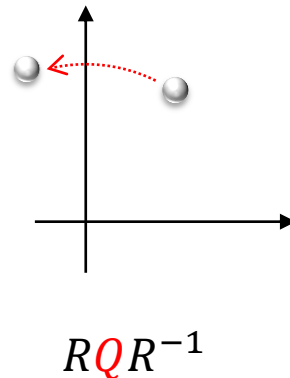
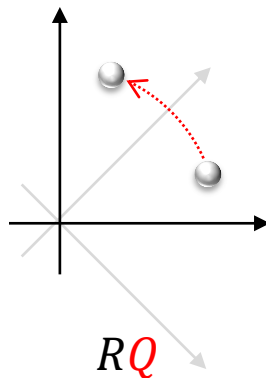
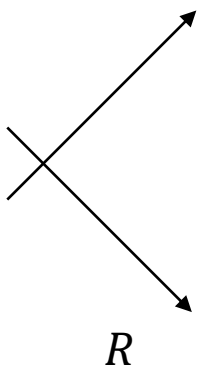
サンドイッチ作用の原理

回転軸はベクトル

三次元回転行列の座標変換

$Q = \exp(\theta(w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3))$: 回転軸 $w = (w_1, w_2, w_3)$ 、回転角度 θ

ある点 x が Q によって y に回転されるとき、別の回転行列 R で座標変換すると？



回転 RQR^{-1} の回転軸は w が R によって回転されたベクトル：
回転軸だけを考えると、ベクトルの回転

クォータニオンのサンドイッチ作用

回転軸 $w = (w_1, w_2, w_3)$ の回転を表すクォータニオン

$q = v + w_1i + w_2j + w_3k$ を $q(v, w)$ で表記したとき、

別の回転を表すクォータニオン r に対して

$$\textcircled{q}' = \textcircled{r} q r^{-1}$$

回転軸： w が r によって
回転されたベクトル

回転軸： w

例えば $q(v, w)$ で $v = 0$ にと
るとベクトルの回転表現(サ
ンドイッチ作用)になる：
回転行列はこれができない

まとめ

- 導入：「ゲームプログラマのための数学の歩き方」でやりたいこと
- 課題
 - クォータニオンの導入
 - 気持ち悪さ
- 解決編
 - リー群とリー環
 - 三次元回転とクォータニオン
 - クォータニオンのサンドイッチ作用

余談

なぜ三元数ではなくて四元数？

二次元回転

$a + bi$
複素数

三次元回転

$a + bi + cj$
三元数

四次元回転

$a + bi + cj + dk$
四元数

これが自然では？
：半分だけ正しい

➡ 三元数という数の体系はうまく作れない

数：加減乗除ができるもの

余談

なぜ三元数ではなくて四元数？

➡ 四元数は四次元の回転を表すことが自然

特集なケースが三次元回転になる

四次元回転

q : 4次元点を表した四元数

r, p : 4次元の「左回転」, 「右回転」
を表す四元数

$$q \rightarrow rqp$$

三次元回転

q : 3次元点を表した四元数

r : 回転を表す四元数

$$q \rightarrow rqr^{-1}$$

- q : 実部0の四元数
- $p = r^{-1}$