



Brand New!

ゲームプログラマのための数学の歩き方 - ラプラシアン編

長谷川 勇 (スクウェア・エニックス)

太田 友 (九州大学)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所



Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

2011年 アジア初の産業数学の研究所として創設される
2013年 産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点に認定される
2014年 アジア・パシフィック産業数学コンソーシアム創立
2017年 文科省委託事業AIMaP幹事拠点
(Advanced Innovation powered by Mathematics Platform)

共同利用研究集会

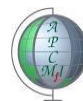
- デジタル映像表現のための数理的手法 (MEIS2017) など

AIMaP研究集会

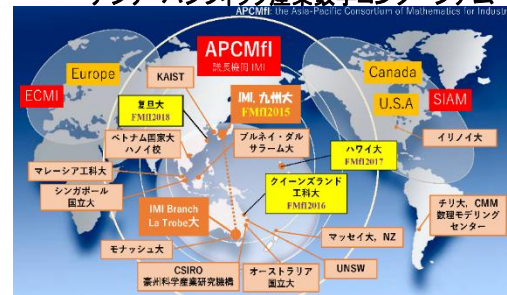
- CG技術の実装と数理2017 など

CEDEC x IMI コラボセッション

- 大規模グラフ解析と都市 OS の開発 (藤澤克樹, 2017年)
- 暗号の安全性はどのように評価するのか (高木剛, 2016年)
- データ解析における学習理論と統計学の特徴と生かし方 (西井龍映, 2015年)
- CGにおける運動や変形の記述とその数理 (落合啓之, 2014年)
- 行列の数理と運動の記述 (落合啓之, 2013年)



APCMfi
The Asia Pacific Consortium of Mathematics for
Industry
アジア・パシフィック産業数学コンソーシアム



Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の間

- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

Disclaimer

一般論

ラプラシアンを例に

今回の講演ですべてを理解するのはおそらく難しい
自分で勉強しようと思ったときに読み返してもらえると嬉しいです

導入

課題

- 独学の難しさ
- 数式の行間

難易度低め: 人によっては退屈かも？

用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

難易度高め: 人によっては難しいかも？

Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ・ ラプラシアンの利用例

課題

- ・ 独学の難しさ
- ・ 数式の間
- ・ 独学で理解できるか？
- ・ なぜラプラシアンを利用？

学び方

- ・ 前提知識とは？
- ・ 前提知識の調べ方
- ・ 論文を実装・応用してみる

行間

- ・ 一般化
- ・ 定義域毎のラプラシアン
- ・ ラプラシアンの「心」

導入：例①球面調和関数

Peter-Pike Sloan, Jan Kautz, and John Snyder.
Precomputed radiance transfer for real-time rendering in
dynamic, low-frequency lighting environments.
ACM Trans. Graph. 21, 3 (July 2002), 527–536.

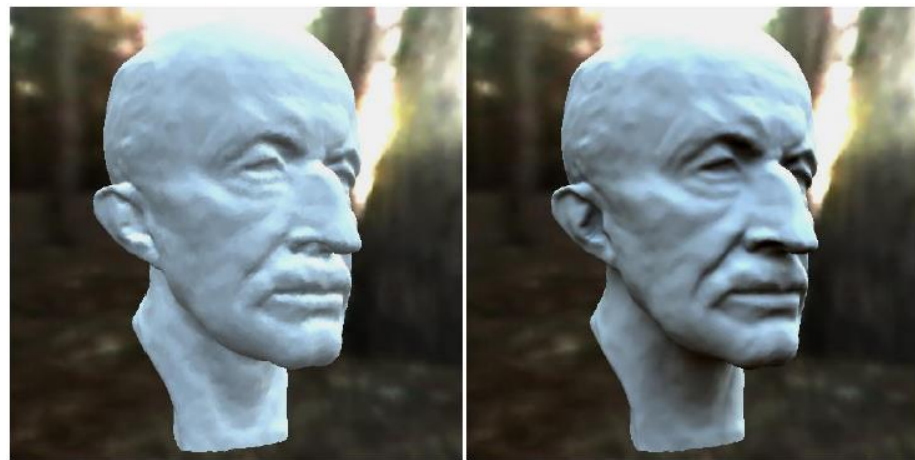
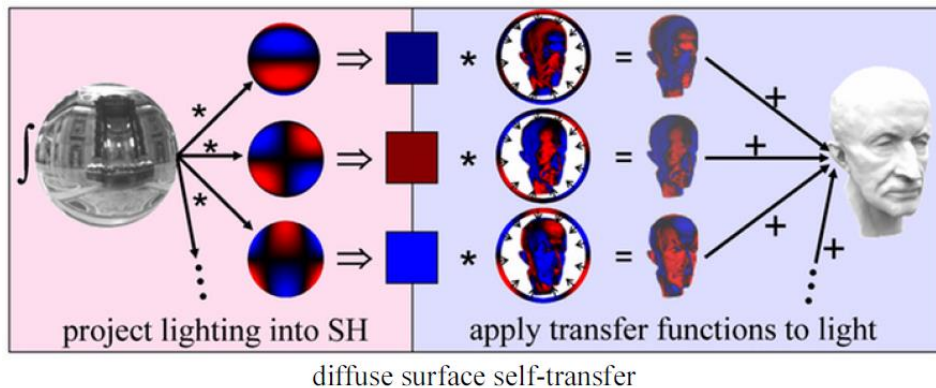


Figure 1: Precomputed, unshadowed irradiance from [34] (left) vs. our precomputed transfer (right). The right model can be rendered at 129Hz with self-shadowing and self-interreflection in **any** lighting environment.

導入：例①球面調和関数

- PRTやLPVなどで利用

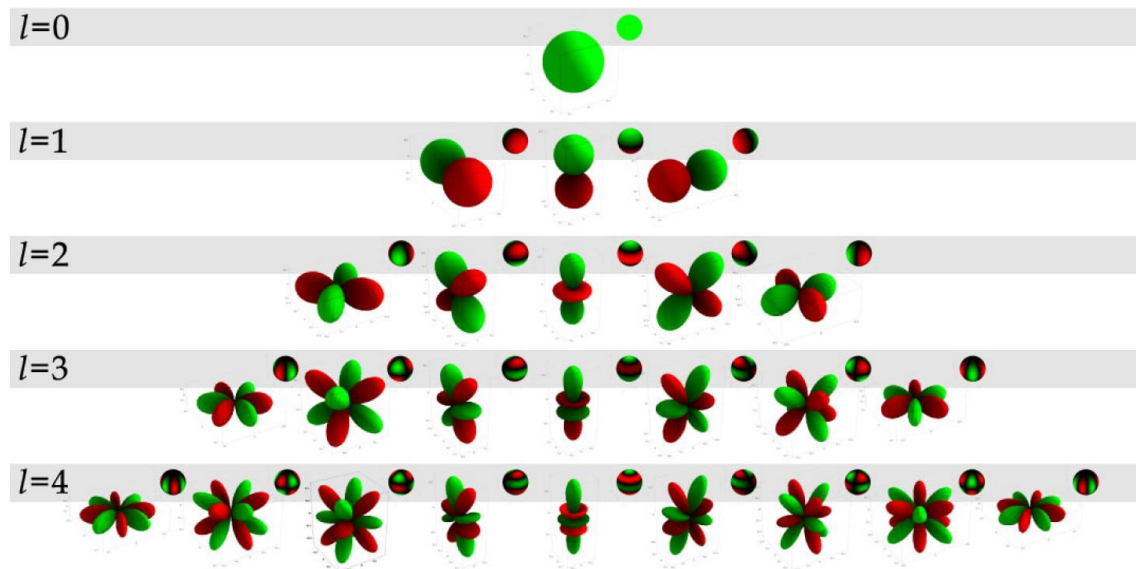


Figure 5. The first 5 SH bands plotted as unsigned spherical functions by distance from the origin and by colour on a unit sphere. Green (light gray) are positive values and red (dark gray) are negative.

Spherical Harmonic Lighting: The Gritty Details, Green, R.,

<http://www.research.scea.com/gdc2003/spherical-harmonic-lighting.html> 2003.

導入：例②メッシュプロセッシング

Bruno Vallet, and Bruno Lévy.

Spectral Geometry Processing with Manifold Harmonics.

Computer Graphics Forum, Wiley, 2008, 27 (2), pp.251-260.

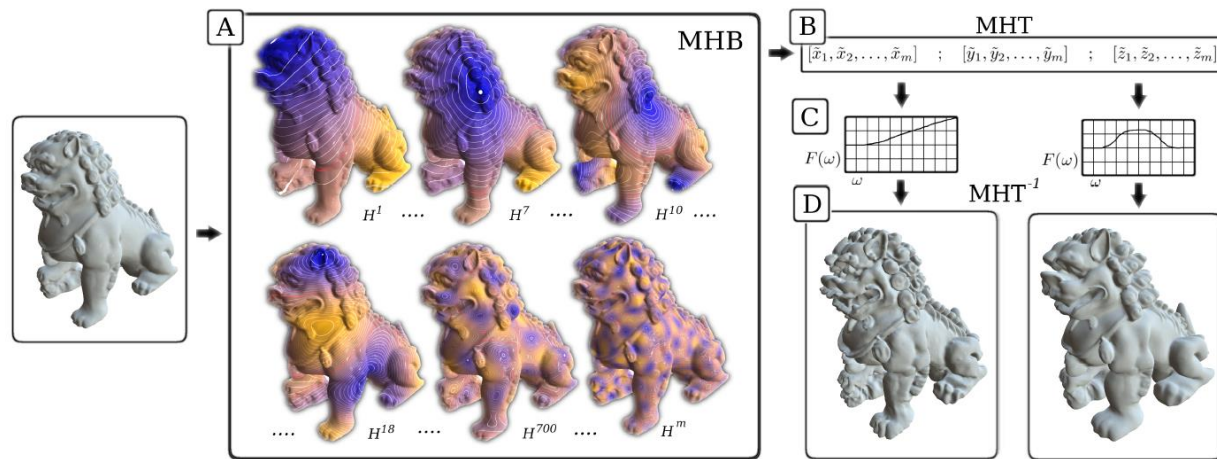


Figure 1: Processing pipeline of our method: A: Compute the Manifold Harmonic Basis (MHB) of the input triangulated mesh. B: Transform the geometry into frequency space by computing the Manifold Harmonic Transform (MHT). C: Apply the frequency space filter on the transformed geometry. D: Transform back into geometric space by computing the inverse MHT.

導入：例②メッシュプロセッシング

- データ圧縮
- スムージング
- 変形
- ...

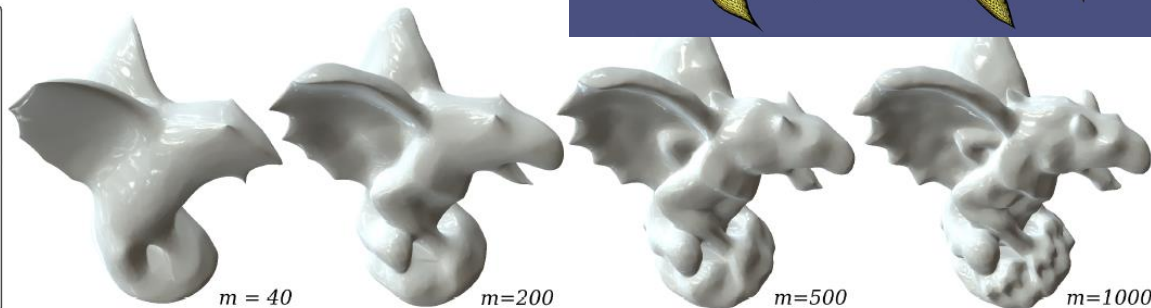
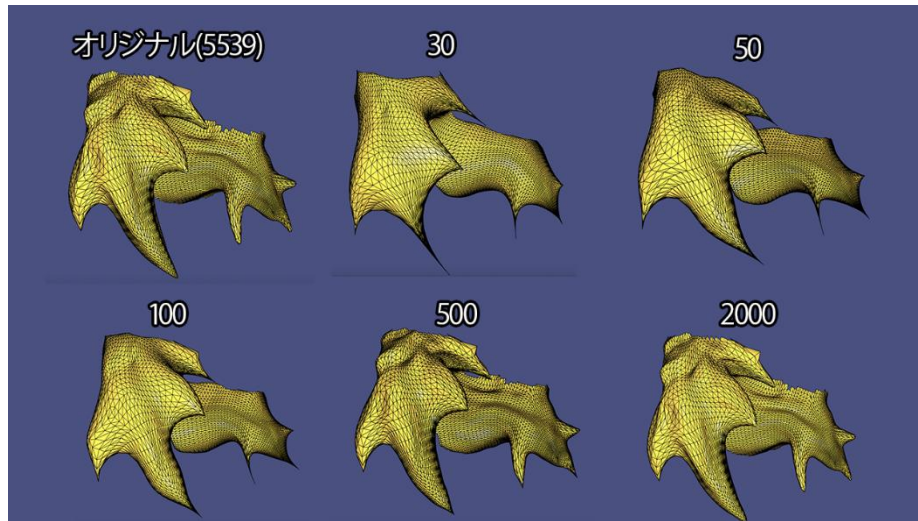
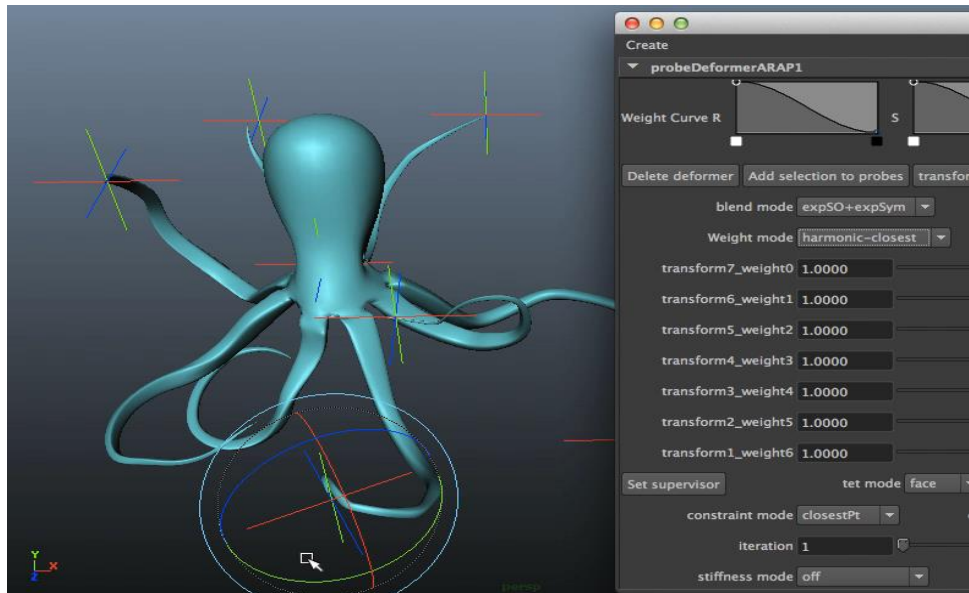


Figure 4: Reconstructions obtained with an increasing number of MH functions.

導入：例③Deformation

Rhaleb Zayer, Christian Rössl, Zach Karni, and Hans-Peter Seidel
Harmonic Guidance for Surface Deformation
Euro Graphics, (2005)



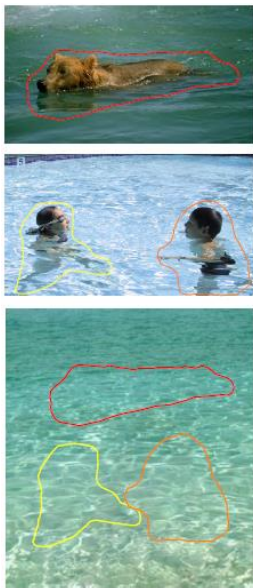
S. Kaji and G. Liu, Probe-type deformers, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis II, pp. 63--77. Springer-Japan, 2015.

導入：例④Poisson Image Editing

Pérez, P., Gangnet, M., and Blake, A.

Poisson image editing

ACM Trans. Graph. 22, 3 (2003), 313 - 318.



sources/destinations



cloning



seamless cloning

Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の行間
- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方
- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化
- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

開発で関連する技術を実装し
ラプラシアンを理解が必要だと仮定します



どう勉強すればいいのでしょうか？



球面調和関数を調べる

- Wikipediaは？



未知のワード

- ∂
- ラプラス作用素
- 斉次多項式

定義 [編集]

$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし、 $\mathbf{C}$ を複素数全体の集合とし、 n 個の実数からなる組の集合を $\mathbf{R}^n$ とし、 $\mathbf{R}^n$ の元を $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ と書き表すことにする。

$\mathbf{R}^n$ 上の複素数値関数

$$\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$$

が2階微分可能なとき、 $\Delta\varphi$ を

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \phi$$

と定義し、 Δ をラプラス作用素という。さらに $\mathbf{R}^n$ 上の多項式 $p(x_1, \dots, x_n)$ で

$$\Delta p = 0$$

を満たすものを調和多項式 (英語版) という[3]。なおラプラス作用素は回転行列 R に対し、

$$\Delta p(R(x)) = R(\Delta p(x))$$

を満たすので[4]、調和多項式の定義は座標系のとり方に依存しない。

調和多項式 p が k 次の斉次多項式であるとき、 p を単位球面

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_i x_i^2 = 1\} \tag{P1}$$

に制限した制限写像

$$Y = p|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$$

を k 次の球面調和関数という[5]。

出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/球面調和関数>

次はラプラス作用素を調べると

- 増えていくワード
 - 多様体
 - テンソル
 - 外微分
 - ホッジ双対
 - ...

一般化 [編集]

ラプラス=ベルトラミ作用素 [編集]

詳細は「[ラプラス=ベルトラミ作用素 \(英語版\)](#)」を参照

ラプラス作用素の概念は、[リーマン多様体](#)上で定義された[ラプラス=ベルトラミ作用素 \(英語版\)](#)と呼ばれる楕円型作用素に一般化することができる。同様にダランベール作用素は擬リーマン多様体上の双曲型作用素に一般化される。ラプラス=ベルトラミ作用素を関数に適用すれば、その関数のヘッセ行列のトレース

$$\Delta f = \text{tr}(H(f))$$

が得られる。ただし、トレースは計量テンソルの逆に関して取るものとする。ラプラス=ベルトラミ作用素を同様の式でテンソル場に作用する作用素（これもまたラプラス=ベルトラミ作用素と呼ばれる）に一般化することができる。

ラプラス作用素の別な一般化として、擬リーマン多様体上で定義される外微分を用いた「幾何学者のラブラシアン」と呼ばれる

$$\Delta f = d^* df$$

を考えることもできる。ここで d^* は余微分 ([英語版](#)) で、[ホッジ双対](#) を使って書くこともできる。これが上に述べた「解析学者のラブラシアン」とは異なるものであることには注意すべきである。そのことは大域解析学の論文を読むときには常に気を付けねばならない。より一般に、微分形式に対して定義される「ホッジ」ラブラシアン α は

$$\Delta \alpha = d^* d \alpha + d d^* \alpha$$

と書ける。これはまたラプラス=ドラム作用素 ([英語版](#)) と呼ばれ、[ヴァイツェンバック不等式 \(英語版\)](#) によってラプラス=ベルトラミ作用素と関係する。

ダランベール作用素 [編集]

ラブラシアンを適当な仕方によって非ユークリッド空間に一般化することができて、それには楕円型、双曲型、超双曲型 ([英語版](#)) などが可能である。

出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/ラプラス作用素>

ホッジ双対？

数学において、**ホッジスター作用素**(ホッジスターさようそ、Hodge star operator)、もしくは、**ホッジ双対**(ホッジそうつい、Hodge dual)は、**ウィリアム・ホッジ**により導入された**線型写像**である。ホッジ双対は、有限次元の**向き付けられた内積空間の外積代数**の上で定義される k -ベクトルのなす空間から $n-k$ -ベクトルのなす空間への線形同型である。

他のベクトル空間に対する多くの構成と同様に、ホッジスター作用素は多様体上の**ベクトルバンドル**への作用に拡張することができる。たとえば余接束の外積代数（すなわち、多様体上の微分形式の空間）に対して、ホッジスター作用素を用いて**ラプラス＝ド・ラーム作用素**を定義し、**コンパクトなリーマン多様体上の微分形式のホッジ分解**を導くことができる。

出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/ホッジ双対>

- 外積代数
- ベクトルバンドル
- 微分形式
- ...



Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の行間

- 独学で理解できるか？
- **なぜラプラシアンを利用？**

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

行間を読むのが難しい(球面調和関数)

調和多項式 p が k 次の斉次多項式であるとき、 p を単位球面

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$$

に制限した制限写像

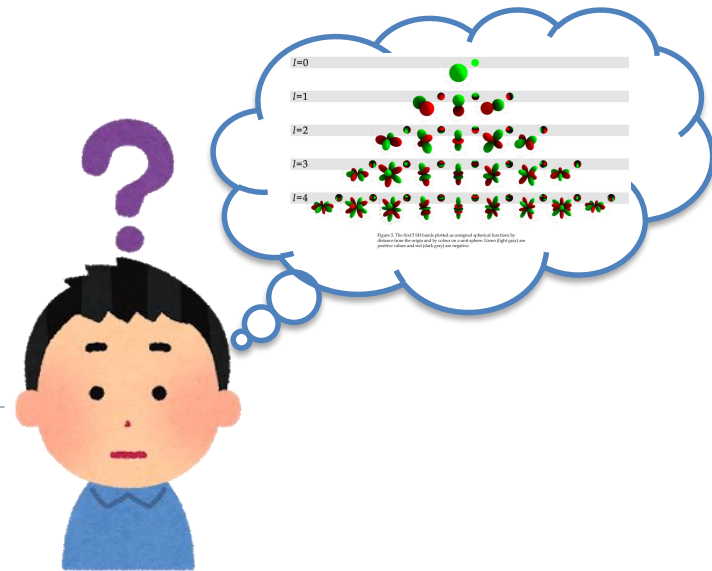
$$Y = p|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$$

を k 次の球面調和関数という^[5]。

3次元空間における球面調和関数 [編集]

3次元空間 $\mathbf{R}^3$ の場合、 $\mathbf{R}^3$ を球面座標 (r, θ, ϕ) で表すと、下記の $Y_k^m(\theta, \phi)$ が球面調和関数になる事が知られている。

$$Y_k^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}} P_k^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (B1)$$



出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/球面調和関数>

行間を読むのが難しい(ラプラシアン)

$\Delta f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2})$ 数式は分かるけど...

- 以下との違いは？

- $\Delta f = \text{tr}(H(f))$

- $\Delta f = d^* df$

- $\Delta \alpha = d^* d\alpha + dd^* \alpha$

- ただの二階微分じゃないの？



Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の間

- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

課題・アプローチ

- 前提知識が分からない
- 行間が読めない



ロードマップ

- 必要な数学知識の学び方(の一例)
- 数式間のギャップを埋める

Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の間

- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

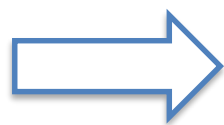
行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

「前提知識」とは？

- 以下はすべて「前提知識」
 - 利用に必要な知識
 - 理解に必要な知識
 - 応用(研究・一般化)に必要な知識
 - 理解してなくてもよい知識

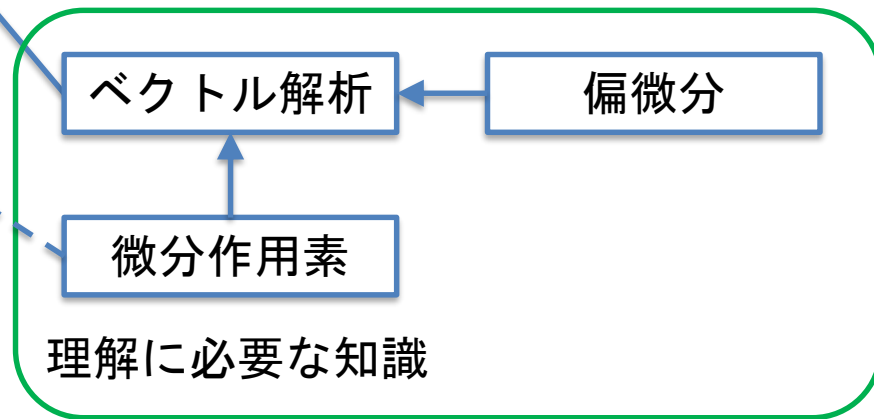
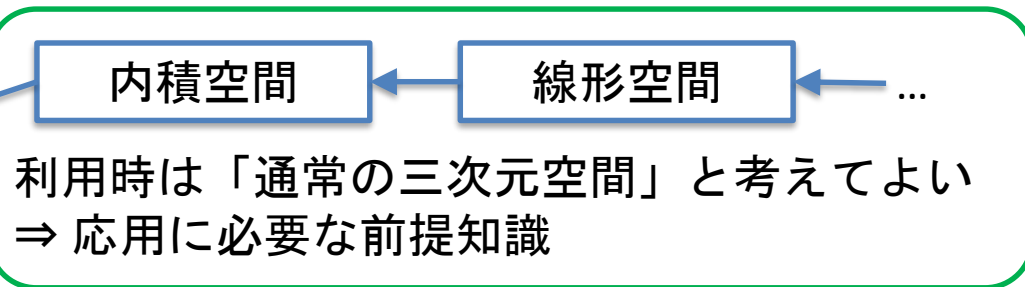


自分が今必要なのはどれか？
意識する必要がある

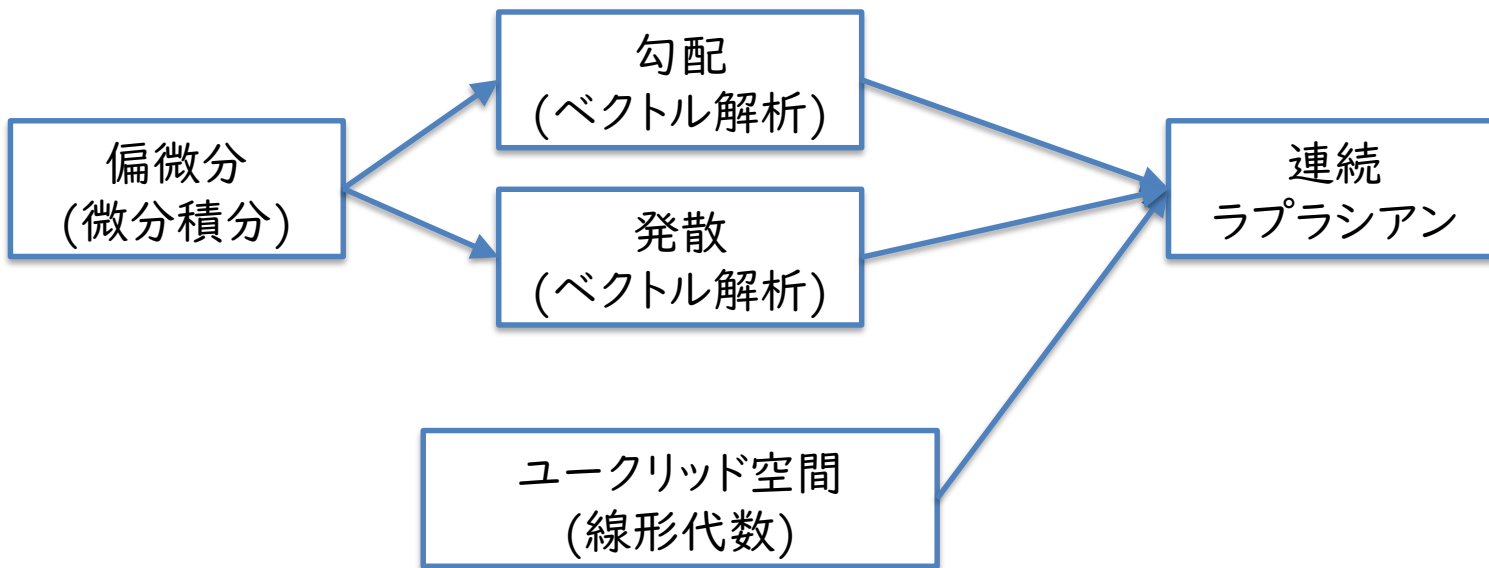
前提知識の例

『ラプラス作用素は、
 n 次元ユークリッド空間上の
関数 f の勾配 ∇f の発散 $\nabla \cdot$
として定義される
二階の微分作用素
である』

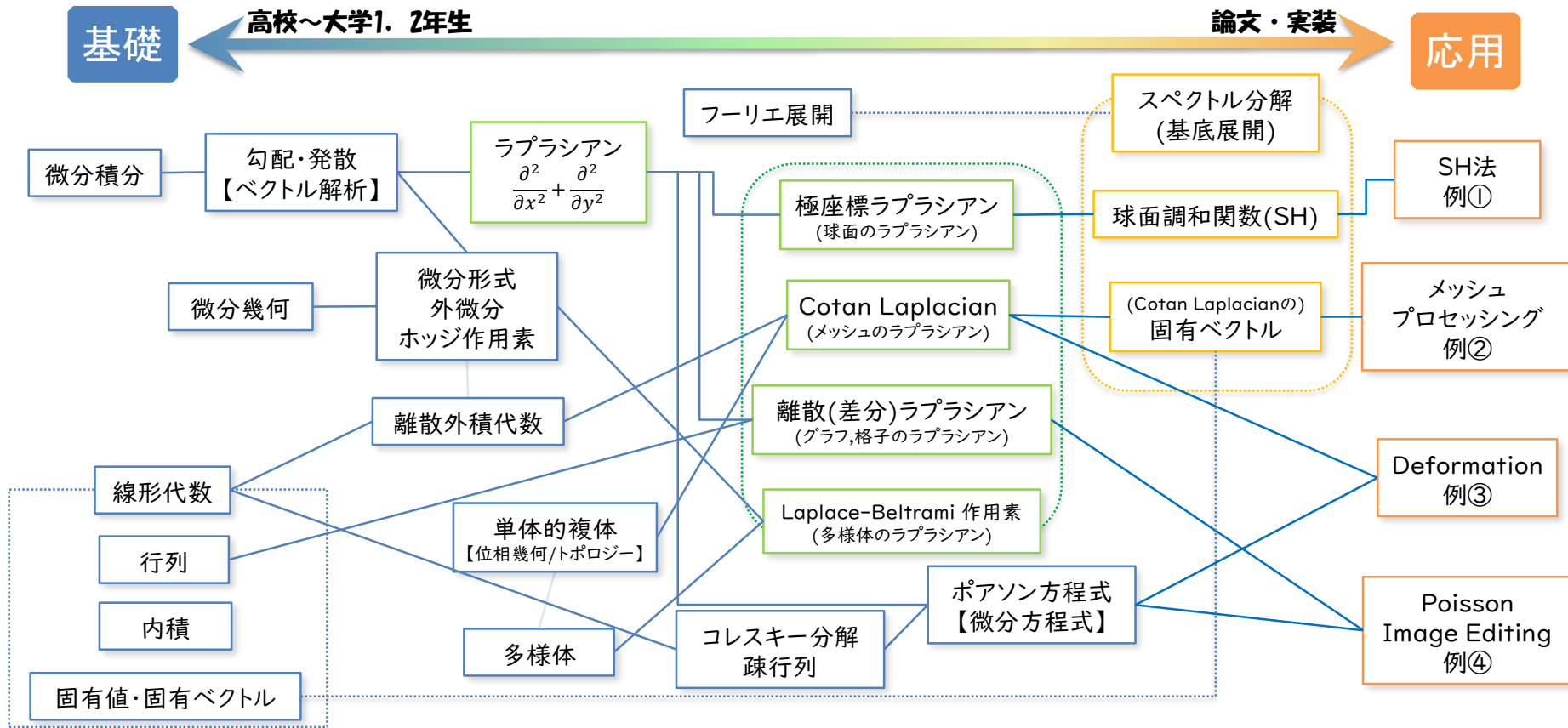
(出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/ラプラス作用素>)



ロードマップ例: 高校数学～(連続)ラプラシアン



ロードマップ【高校数学～ラプラシアン】



Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ・ ラプラシアンの利用例

課題

- ・ 独学の難しさ
- ・ 数式の間

- ・ 独学で理解できるか？
- ・ なぜラプラシアンを利用？

学び方

- ・ 前提知識とは？
- ・ 前提知識の調べ方

- ・ 論文を実装・応用してみる

行間

- ・ 一般化

- ・ 定義域毎のラプラシアン
- ・ ラプラシアンの「心」

ケーススタディ： 実際の論文の実装と ロードマップの使用例を考える

ケーススタディ：論文の実装を考える

- Bruno Vallet, Bruno Lévy.
Spectral Geometry Processing with Manifold Harmonics.
Computer Graphics Forum, Wiley, 2008, 27 (2), pp.251-260.

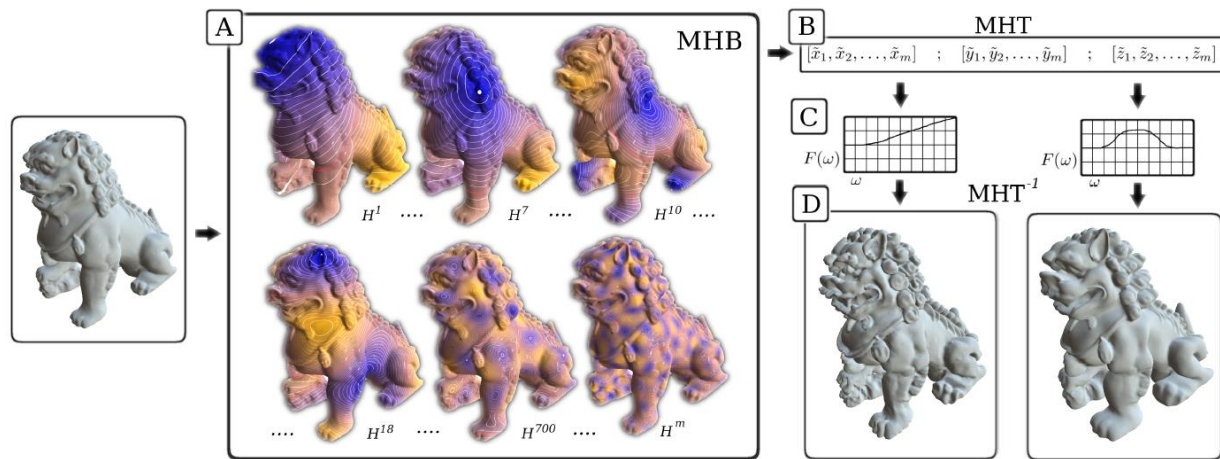


Figure 1: Processing pipeline of our method: A: Compute the Manifold Harmonic Basis (MHB) of the input triangulated mesh. B: Transform the geometry into frequency space by computing the Manifold Harmonic Transform (MHT). C: Apply the frequency space filter on the transformed geometry. D: Transform back into geometric space by computing the inverse MHT.

先頭から読んでいくと...

2.2. DEC for spectral analysis

For a complete introduction to DEC we refer the reader to [DKT05], [Hir03] and to [AFW06] for proofs of convergence. We quickly introduce the few notions and notations that we are using to define the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and generalized second-order derivative (i.e. Laplacian operator).

A k -simplex s_k is the geometric span of $k+1$ points. For instance, 0, 1 and 2-simplices are points, edges and triangles respectively. In our context, a mesh can be defined as a 2-dimensional simplicial complex S , i.e. a collection of n_k k -simplices ($k=0,1,2$), with some conditions to make it manifold. A discrete k -form ω^k on S is given by a real value $\omega^k(s_k)$ associated with each oriented k -simplex (that corresponds to the integral of a smooth k -form over the k -simplex). The set $\Omega^k(S)$ of k -forms on S is a vector space of dimension n_k . With a proper numbering of the k -simplices, ω^k can be assimilated to a vector of size n_k , and linear operators from $\Omega^k(S)$ to $\Omega^l(S)$ can be assimilated to (n_k, n_l) matrices.

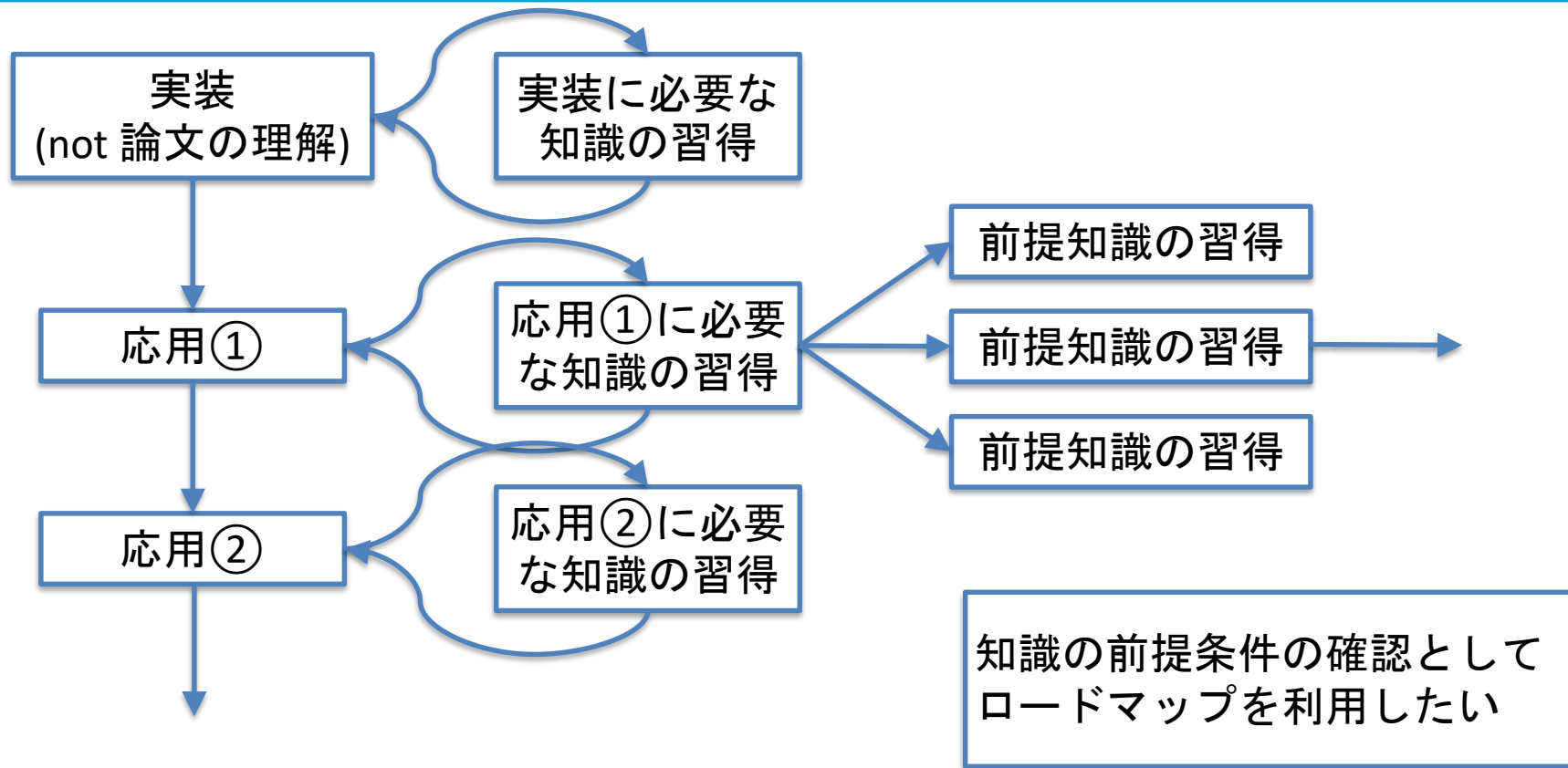
The exterior derivative $d_k: \Omega^k(S) \rightarrow \Omega^{k+1}(S)$ is defined by the signed adjacency matrix: $(d_k)_{s_k, s_{k+1}} = \pm 1$ if s_k belongs to the boundary of s_{k+1} , with the sign depending on their respective orientations.

- Discrete Exterior Calculus
- Simplex / Simplicial Complex
- Manifold
- Vector Space
- Exterior Derivative



利用・理解・応用にすべての
前提知識が必要なわけではない

方針



libiglとは

- C++のジオメトリ処理ライブラリ
- ヘッダーのみなのでincludeするだけで動く
- CG処理で欲しい機能の多くが関数として実装されている！



引用 : <https://libigl.github.io/>

libigl紹介

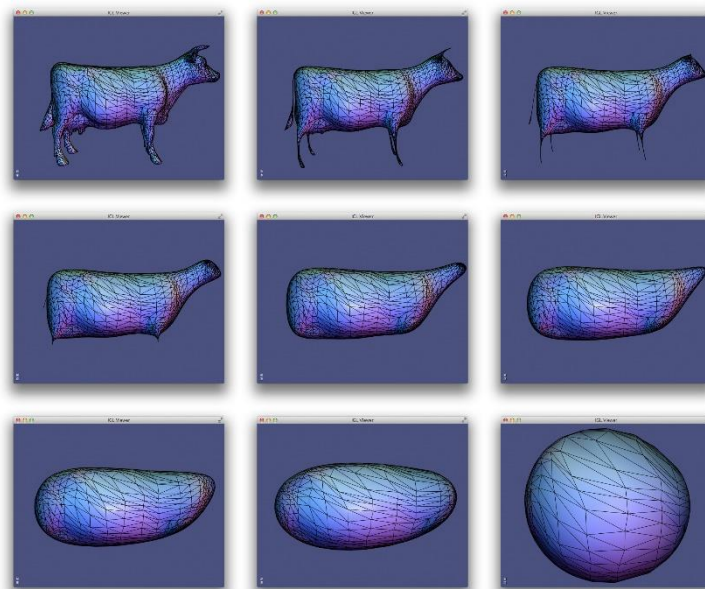
太田

- 実は論文の実装はlibiglの関数で可能
(チュートリアルに同様の内容がある)
- 今回メインとなるCotan Laplacianも
関数一行で書ける

V:頂点情報 F:面情報

`igl::cotmatrix(V,F,L);`

└─ L:ラプラシアン行列
(出力)



ラプラシアン行列を用いた平滑化の様子
引用 : <https://libigl.github.io/tutorial/>

実装するには(ライブラリ利用)

$$\Delta_{ij} = -\frac{\cot(\beta_{ij}) + \cot(\beta'_{ij})}{|v_i^*|} \quad ; \quad \Delta_{ii} = -\sum_j \Delta_{ij}$$

...

$$\bar{\Delta} = \star_0^{-1/2} \Delta \star_0^{-1/2} \quad ; \quad \bar{\Delta}_{ij} = -\frac{\cot \beta_{ij} + \cot \beta'_{ij}}{\sqrt{|v_i^*| |v_j^*|}} \quad (4)$$

2.3. The Manifold Harmonic Basis (MHB)

Given these definitions, we can now compute the MHB, defined to be the set of eigenvectors of $\bar{\Delta}$ expressed in the canonical basis:

1. Assemble the discrete Laplacian $\bar{\Delta}$ (see Equation 4);
2. Compute its eigenvectors ($\bar{H}^k$) (see Section 4);
3. Map them into the canonical basis: $(H^k) = (\star_0^{-1/2} \bar{H}^k)$.

The set of so-obtained (H^k) vectors is called the Manifold Harmonics basis (MHB). An example is shown in Figure 3.

libigl(<https://libigl.github.io/>)のtutorialに“Eigen Decomposition”が、そのまま実装されている

```
SparseMatrix<double> L,M;  
igl::cotmatrix(V,F,L);  
igl::massmatrix(V,F,igl::MASSMATRIX_TYPE_DEFAULT,M);  
Eigen::MatrixXd U;  
Eigen::VectorXd S;  
igl::eigs(L,M,5,igl::EIGS_TYPE_SM,U,S);
```

Cotan Laplacian

Hodge star (Mass matrix)

Eigen vectors

しかし...

ライブラリ利用時の典型的な課題

- パフォーマンス
- ライセンス

単なる実装だけでは不十分
応用が必要

応用①(一部ライブラリ使用)

$$\Delta_{ij} = -\frac{\cot(\beta_{ij}) + \cot(\beta'_{ij})}{|v_i^*|} \quad ; \quad \Delta_{ii} = -\sum_j \Delta_{ij}$$

...

$$\bar{\Delta} = \star_0^{-1/2} \Delta \star_0^{-1/2} \quad ; \quad \bar{\Delta}_{ij} = -\frac{\cot \beta_{ij} + \cot \beta'_{ij}}{\sqrt{|v_i^*| |v_j^*|}} \quad (4)$$

2.3. The Manifold Harmonic Basis (MHB)

Given these definitions, we can now compute the MHB, defined to be the set of eigenvectors of $\bar{\Delta}$ expressed in the canonical basis:

1. Assemble the discrete Laplacian $\bar{\Delta}$ (see Equation 4);
2. Compute its eigenvectors ($\bar{H}^k$) (see Section 4);
3. Map them into the canonical basis: $(H^k) = (\star_0^{-1/2} \bar{H}^k)$.

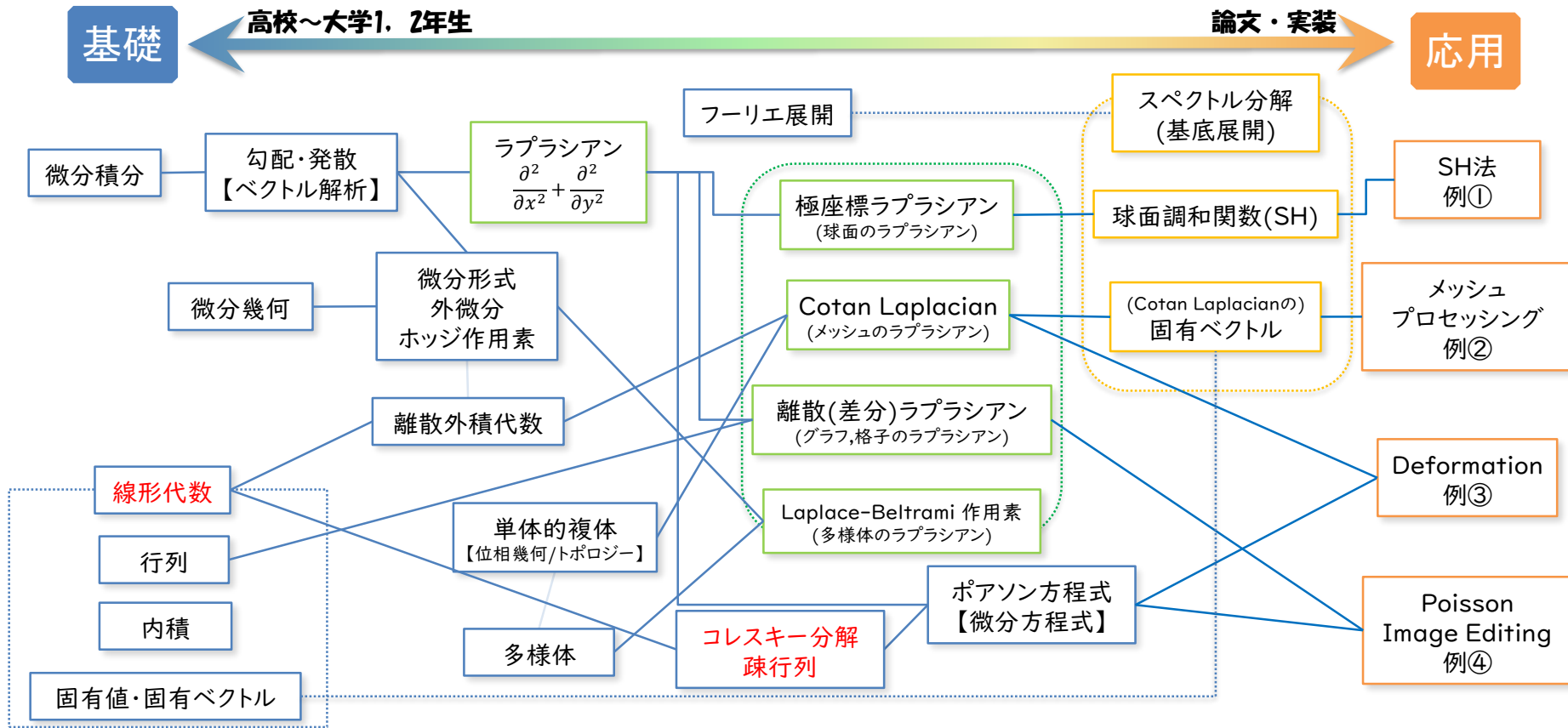
The set of so-obtained (H^k) vectors is called the Manifold Harmonics basis (MHB). An example is shown in Figure 3.

```
SparseMatrix<double> L, M; //L:ラプラシアン行列, M:重み行列
igl::cotmatrix(V, F, L);
igl::massmatrix(V, F, igl::MASSMATRIX_TYPE_DEFAULT, M);
SparseMatrix<double> Msqrt; //Msqrt:M^(-1/2)
Msqrt = (M.cwiseInverse()).cwiseSqrt();
SparseMatrix<double> Lbar;
Lbar = Msqrt * L * Msqrt;
```

- (1) $\lambda_S \leftarrow 0 \quad ; \quad \lambda_{last} \leftarrow 0$
- (2) **while** ($\lambda_{last} < \omega_m^2$)
- (3) compute the Cholevsky factorization of $\Delta_S = \bar{\Delta} - \lambda_S Id$
- (4) find the 50 first eigenpairs ($\bar{H}^k, \mu_k$) of Δ_S^{-1}
- (5) **for** $k = 1$ **to** 50
- (6) $\lambda_k \leftarrow \lambda_S + 1/\mu_k$
- (7) **if** ($\lambda_k > \lambda_{last}$) **write** ($\bar{H}^k, \lambda_k$)
- (8) **end** **//for**
- (9) $\lambda_S \leftarrow \max(\lambda_k) + 0.4(\max(\lambda_k) - \min(\lambda_k))$
- (10) $\lambda_{last} \leftarrow \max(\lambda_k)$
- (11) **end** **//while**

線形代数が分かれば実装できそう

ロードマップ【高校数学～ラプラシアン】



応用② (ライブラリ不使用)

$$\Delta_{ij} = -\frac{\cot(\beta_{ij}) + \cot(\beta'_{ij})}{|v_i^*|} \quad ; \quad \Delta_{ii} = -\sum_j \Delta_{ij}$$

...

$$\bar{\Delta} = \star_0^{-1/2} \Delta \star_0^{-1/2} \quad ; \quad \bar{\Delta}_{ij} = -\frac{\cot \beta_{ij} + \cot \beta'_{ij}}{\sqrt{|v_i^*| |v_j^*|}} \quad (4)$$

2.3. The Manifold Harmonic Basis (MHB)

Given these definitions, we can now compute the MHB, defined to be the set of eigenvectors of $\bar{\Delta}$ expressed in the canonical basis:

1. Assemble the discrete Laplacian $\bar{\Delta}$ (see Equation 4);
2. Compute its eigenvectors ($\bar{H}^k$) (see Section 4);
3. Map them into the canonical basis: $(H^k) = (\star_0^{-1/2} \bar{H}^k)$.

The set of so-obtained (H^k) vectors is called the Manifold Harmonics basis (MHB). An example is shown in Figure 3.

DEC provides $\Omega^k(S)$ with a L_2 inner product:

$$\langle \omega_1^k, \omega_2^k \rangle = (\omega_1^k)^T \star_k \omega_2^k \quad (3)$$

where $\star_k$ is the so-called *Hodge star*. As a matrix, the Hodge star is diagonal with elements $|s_k^*|/|s_k|$ where s_k^* denotes the circumcentric dual of simplex s_k , and $|\cdot|$ is the simplex volume. In particular, for vertices, edges and triangles:

$$(\star_0)_{vv} = |v^*| \quad ; \quad (\star_1)_{ee} = \frac{|e^*|}{|e|} = \cot \beta_e + \cot \beta'_e \quad ;$$

where β_e and β'_e denote the two angles opposite to e .

単体(Simplex)と線形代数がわかれば
実装できそう

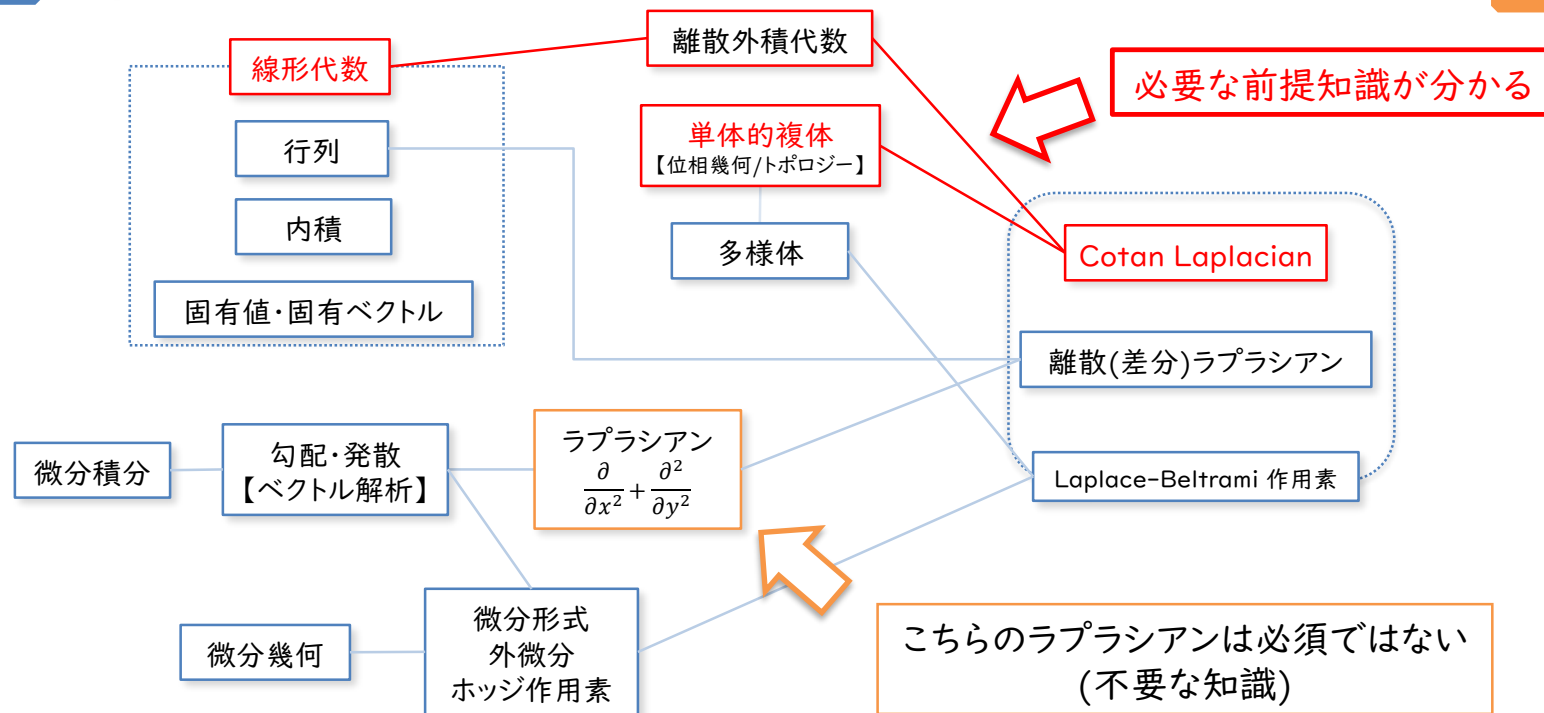
ロードマップ例【高校数学～ラプラシアン】

基礎

高校～大学1, 2年生

論文・実装

応用



ここまでのまとめ

- ・新しい技術や数学を独学することは難しい
- ・必要な前提知識がたくさんあるように見える
- ・実際に必要な知識と不要な知識を見分けることは困難

どういう順序で勉強すればいいかわからない！



ロードマップがあると、スムーズに学ぶことができる。

Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ・ ラプラシアンの利用例

課題

- ・ 独学の難しさ
- ・ 数式の間

- ・ 独学で理解できるか？
- ・ なぜラプラシアンを利用？

学び方

- ・ 前提知識とは？
- ・ 前提知識の調べ方

- ・ 論文を実装・応用してみる

行間

- ・ 一般化

- ・ 定義域毎のラプラシアン
- ・ ラプラシアンの「心」

後半では

数式の「心」を理解したい

課題

・数式の「心」とは？

特に技術開発で！

「実装だけでなく、なぜ上手くいくのか知りたい」

「どうやって(計算方法を)思いついたのか知りたい」

→ 応用や発展を見据えた
理解がもとめられる

が、そこまで理解することは難しい……



課題

なぜ難しいのか？ → 認識のギャップ

例1) 微分 $\leftrightarrow$ 積分

「傾き」と「面積」をそれぞれ計算できる人でも

実はそれが逆関係であると自力で気付くのは難しい

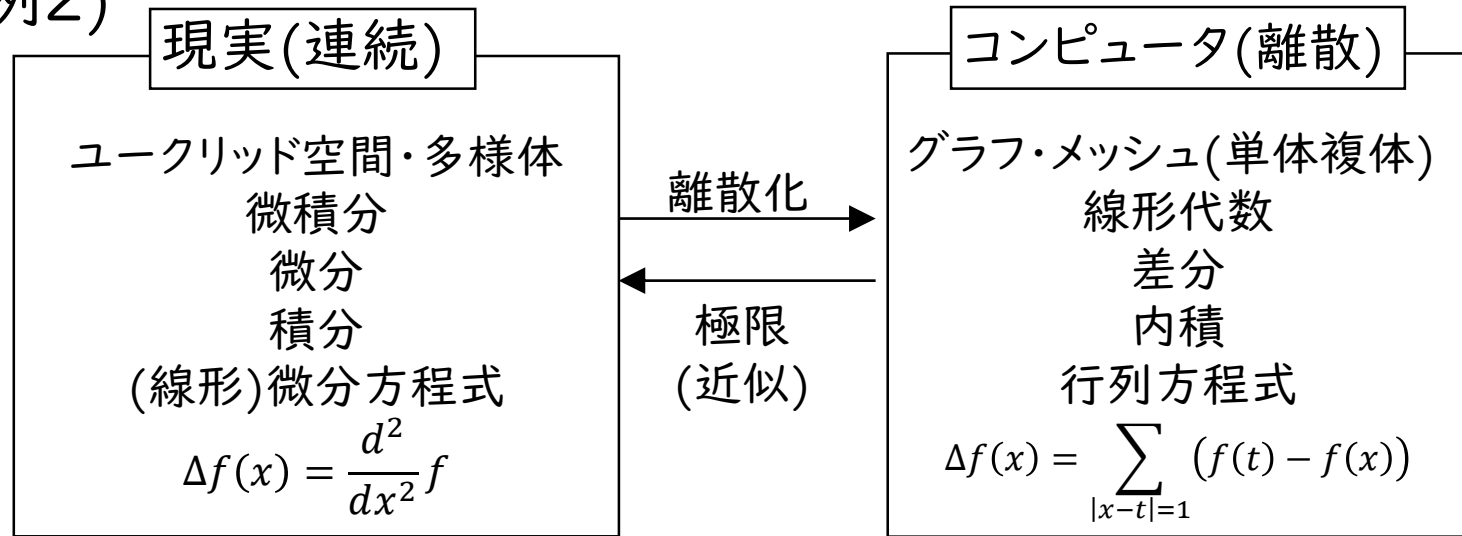
しかし、最新の論文などでそこから解説してくれるものはほとんどない

技術が高度になるにつれ、
書かれている言葉には「行間」が広がっていく



課題

例2)



コンピュータ関連の数学では、これらの関係が暗黙に扱われる。
これらの関係は、初学者では気付けないことも多い

後半の目的

- 前提知識が分からない
- 行間が読めない



ロードマップ

ラプラスアン版を
作成しました

- 必要な数学知識の学び方(の一例)
- 数式間のギャップを埋める

後半の目的

ラプラシアンの「心」を理解したい!!

- ・「なぜ? どうして?」の解消
- ・ロードマップの紹介

Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の間

- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

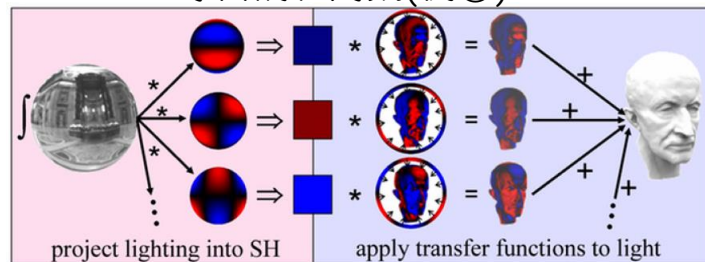
行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

ラプラシアンを用いた技術の例

球面調和関数(例①)

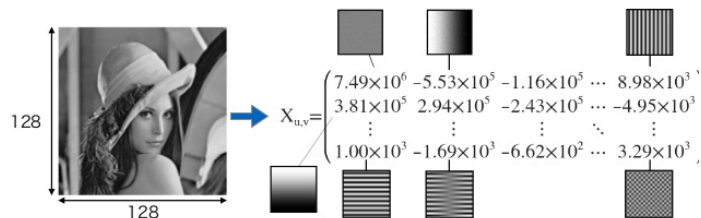


diffuse surface self-transfer

JEPG圧縮

画像のフーリエ変換

二次元のデータ点である画像をフーリエ変換すると



このような波形がどのような割合で含まれているかを表す

(引用:<https://www.slideshare.net/ginrou799/ss-46355460>)

メッシュプロセッシング(例②)

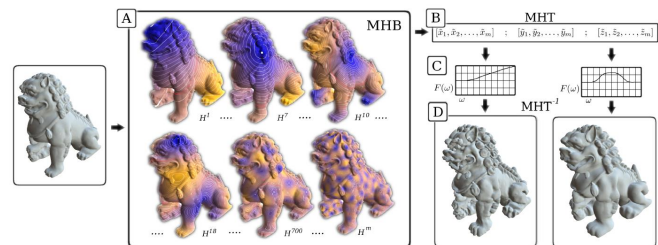


Figure 1: Processing pipeline of our method: A: Compute the Manifold Harmonic Basis (MHB) of the input triangulated mesh. B: Transform the geometry into frequency space by computing the Manifold Harmonic Transform (MHT). C: Apply the frequency space filter on the transformed geometry. D: Transform back into geometric space by computing the inverse MHT.

様々な場所で用いられる
近似(圧縮)の技術



共通のキーワード
「ラプラシアン」

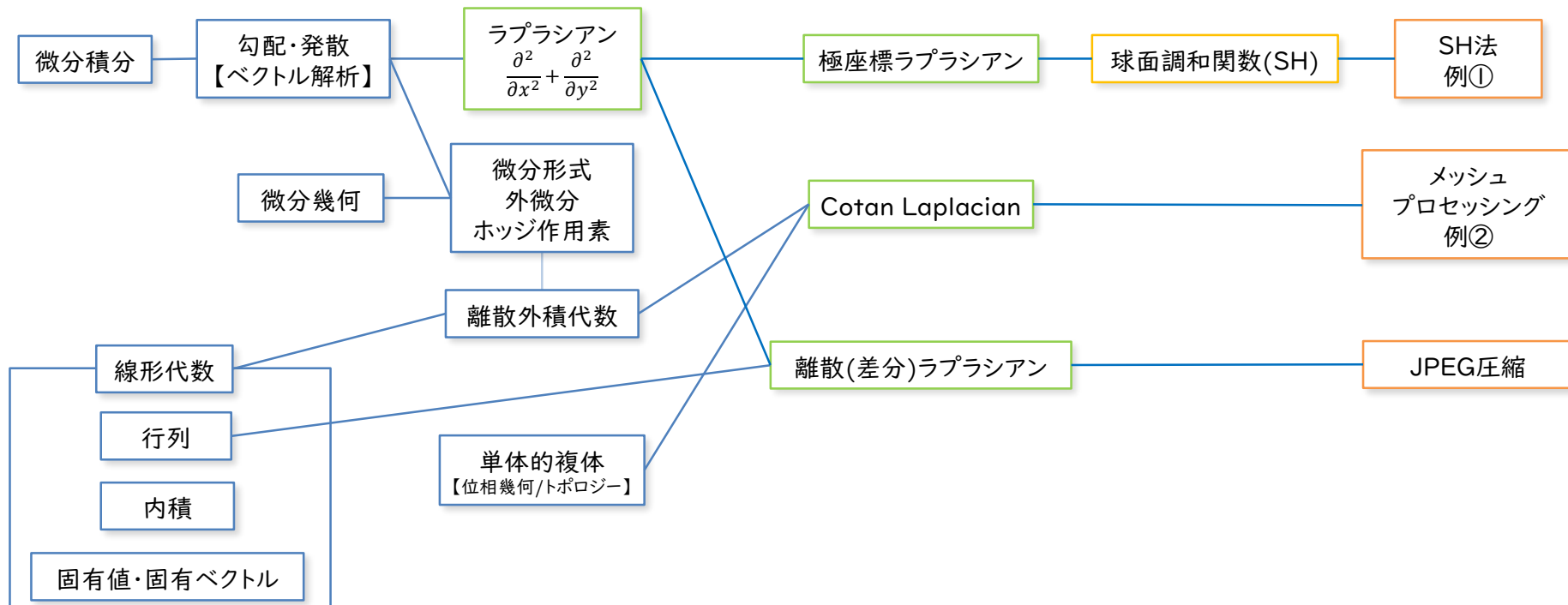
ラプラシアンとは？

基礎

高校～大学1, 2年生

論文・実装

応用



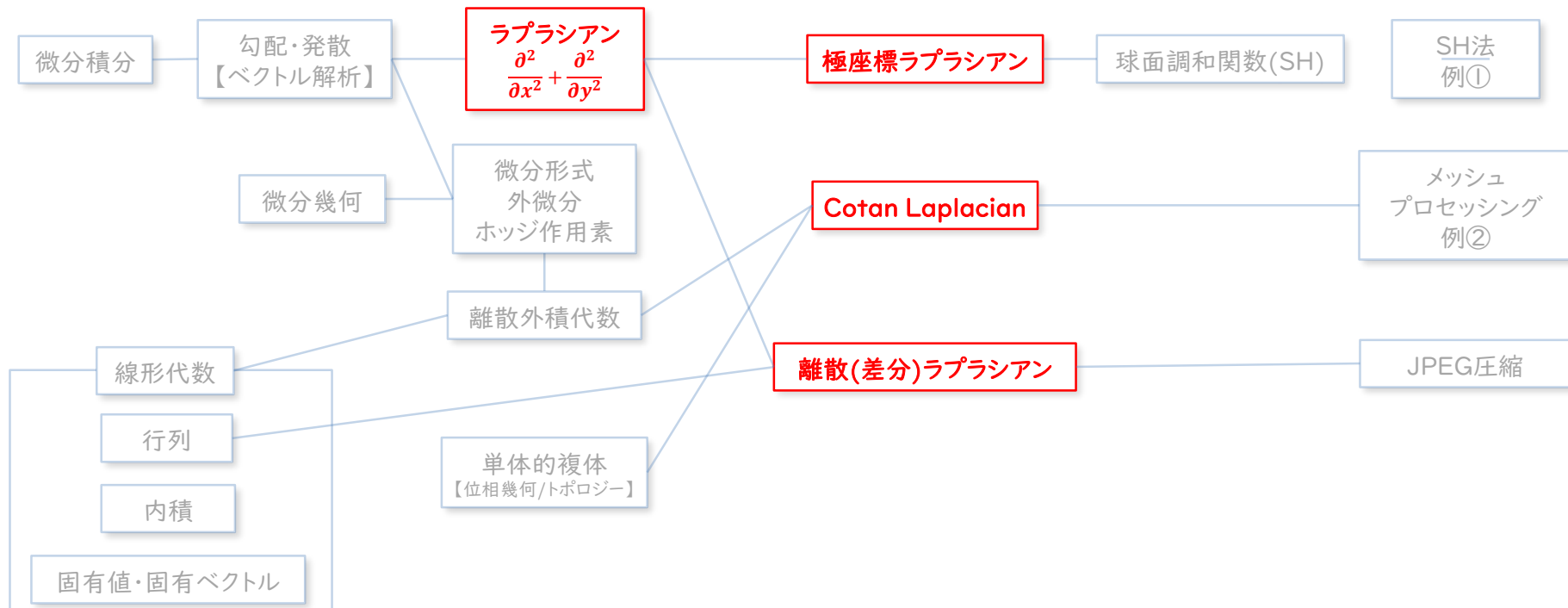
ラプラシアンとは？

基礎

高校～大学1, 2年生

論文・実装

応用



ラプラシアンとは？

全部ラプラシアン

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta p_i = \sum_{j \in N(i)} (p_j - p_i)$$



$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right)$$

$$\sum_{j \in N(i)} \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \alpha_{ji}}{2A_i} (p_j - p_i)$$

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

Q: ラプラシアンとは？

ラプラシアンとは？

【答えの一例】

いろいろな場所(定義域)で
フーリエ展開をするために必要なもの

(今回の講演では)



ラプラシアンの「心」

Outline

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の間

- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」

フーリエ展開

フーリエ展開の紹介

与えられた波形 $f(x)$ に対し、以下のような展開ができる

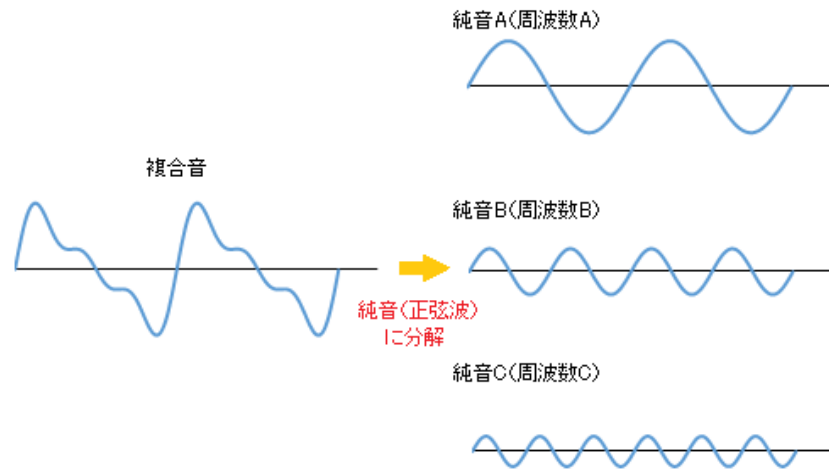
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

【音声サンプリング技術】

高周波がカットできる
(可聴域だけ残す)



有限データ数で音を(ほぼ)再現可能に



(引用:<http://oto-kata.jp/home/h05-1.html>)

フーリエ展開

ポイント

- ① 簡単な波の重ね合わせ
 $\sin x, \cos x$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- ② 係数が簡単に計算できる
→ 内積になっている

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

- ③ 係数が周波数という
物理量と対応

これを他の分野でも応用したい



出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/ジョセフ・フーリエ>

フーリエ展開

応用したいが……

【問題点】

他の応用先の簡単な波とは何か??

- ・ $\sin x, \cos x$ は一次元の波しか表現できない
- ・一般的に $\sin x, \cos x$ の拡張は簡単ではない。

基本の波ってどうやって見つけるの??



ラプラシアンの出番!!



ラプラシアンと基本波

簡単な波(sin, cos)の特徴とは？

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} \quad (\text{ラプラシアン of 1番簡単な例})$$

フーリエ変換で分解に用いた $\sin(nx)$ や $\cos(nx)$ を使うと

$$\overset{\text{ラプラシアン}}{\boxed{\frac{d^2}{dx^2}}} \sin(nx) = \overset{\text{固有値}}{\boxed{-n^2}} \sin(nx) \longleftrightarrow Ax = \lambda x$$

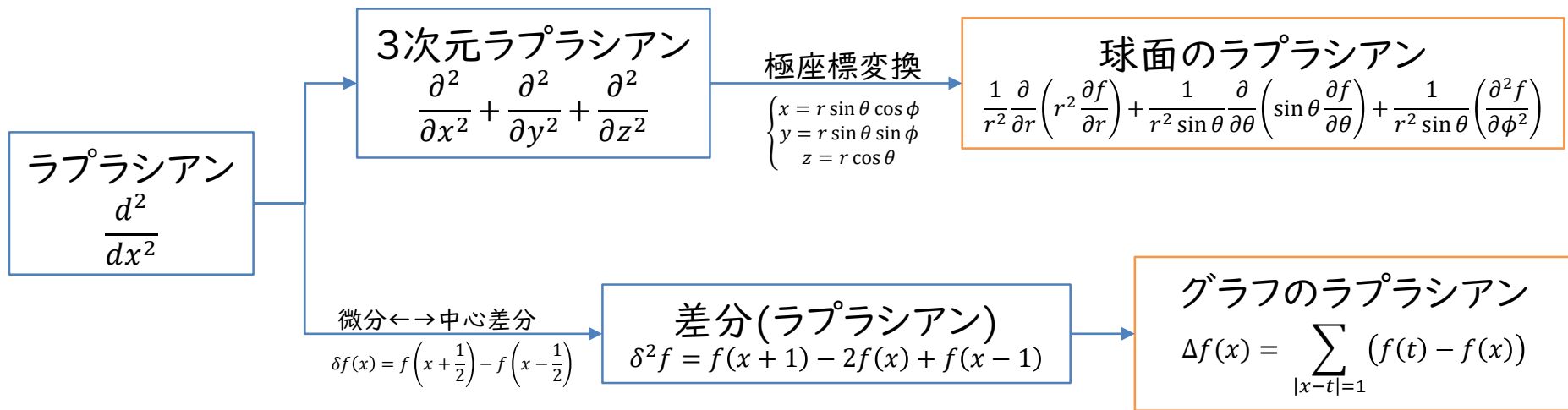
固有関数 (線型代数の知識)

「基本の波」 $\longleftrightarrow$ 「ラプラシアンの固有関数」の関係

ラプラシアンが分かれば基本の波が決められる!!

ラプラシアンと基本波

ラプラシアンは拡張できる!!



ラプラシアンが分かったので、基本の波が計算できそう!

ラプラシアンと基本波

いろいろな基本の波

定義域	ラプラシアン	固有関数
$[0, 2\pi]$ 【円周】	$\frac{d^2}{dx^2}$	$\sin x, \cos x$
球面	球面ラプラシアン	球面調和関数【SH】
画像【M×N格子】	離散(差分)ラプラシアン	$e^{2\pi i(\frac{x}{M} + \frac{y}{N})}$
3Dメッシュ	Cotan Laplacian	(行列の)固有ベクトル

いろんなラプラシアンがあったのは
定義域の違いが原因!!

※この固有関数が本当にsin,cosの代わりになるかは
議論が必要だが、大体の場合は良い性質を引き継いでいる

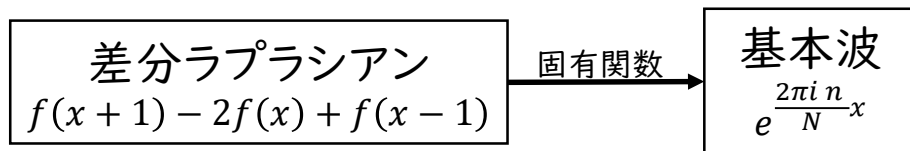
様々なフーリエ展開の例

- 離散フーリエ展開(DFT,FFT)

フーリエ展開の離散ver

コンピュータのデータは離散のため実用上はこちらを用いることが多い

N 個のデータ $f_1, f_2, \dots, f_N$ に対し $f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_n e^{\frac{2\pi i k}{N} n}$ と展開できる



周波数 F_n の計算も容易

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i k}{N} n}$$

画像圧縮や大容量通信に使われている!

様々なフーリエ展開の例

• JPEG圧縮

画像データを2次元離散フーリエ変換
(正確には離散コサイン変換)

$$F_{n,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f_{k,l} e^{-2\pi i \left(\frac{k}{N}n + \frac{l}{M}m \right)}$$

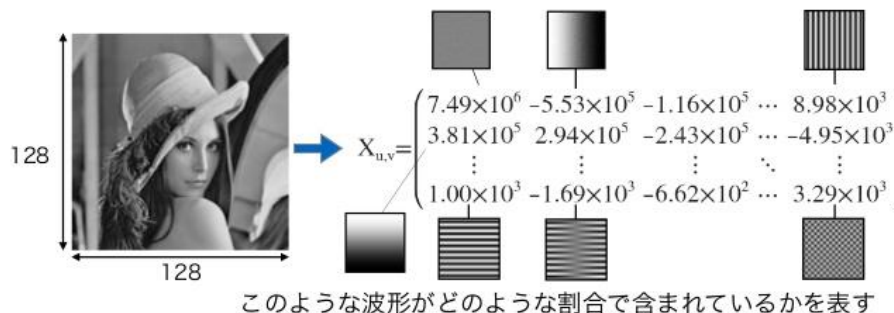
$f_{k,l}$ は周波数の大きさになっている!
(画像の細かさ)

高周波をカットして復元することで
大幅な圧縮を実現!!

→音声サンプリングと同じ発想

画像のフーリエ変換

二次元のデータ点である画像をフーリエ変換すると



(引用:<https://www.slideshare.net/ginrou799/ss-46355460>)

様々なフーリエ展開の例

- 球面調和関数(SH)

球面座標ラプラシアン(の角度部分)

↓固有関数

球面調和関数

$$Y_k^m(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}} P_k^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

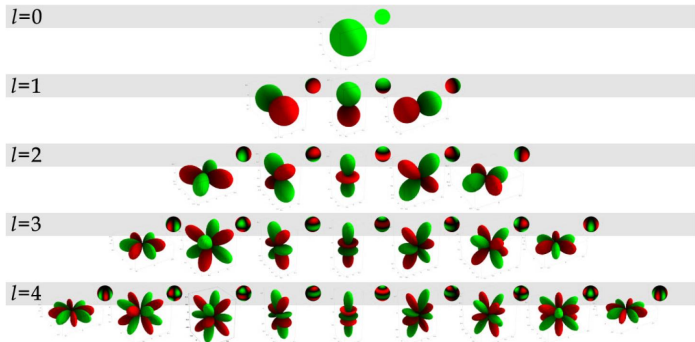
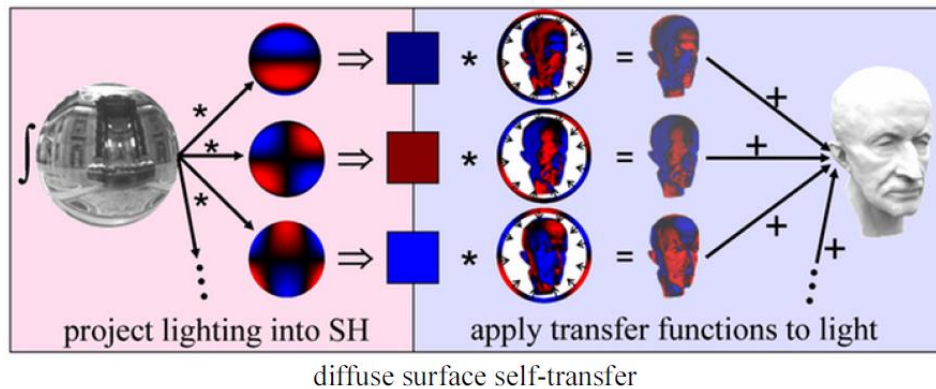


Figure 5. The first 5 SH bands plotted as unsigned spherical functions by distance from the origin and by colour on a unit sphere. Green (light gray) are positive values and red (dark gray) are negative.



【SH法】

- ・ライティング情報をSHで展開
- ・高周波部分をカットして近似
- ・復元もただの内積計算なので速い!

様々なフーリエ展開の例

- 3DCGに応用した場合

In this orthonormalized basis ($\tilde{\phi}_i$), the Laplacian $\tilde{\Delta}$ is symmetric, and its coefficients are given by:

$$\tilde{\Delta} = \star_0^{-1/2} \Delta \star_0^{-1/2} \quad ; \quad \tilde{\Delta}_{ij} = -\frac{\cot \beta_{ij} + \cot \beta'_{ij}}{\sqrt{|v_i^*| |v_j^*|}} \quad (4)$$

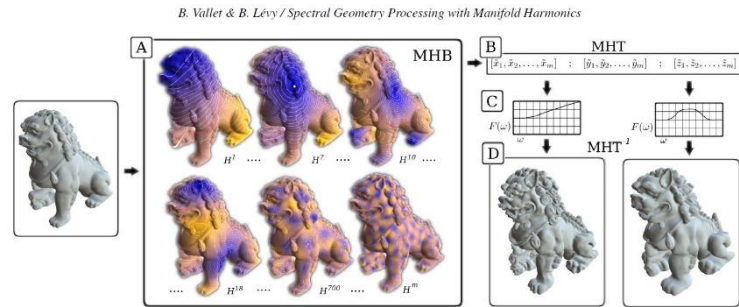
Cotan Laplacian
(メッシュ上のラプラシアン)

where x_i denotes the x coordinate at vertex i . Computing the MHT means projecting the function x into the MHB, i.e. finding the coefficients $\tilde{x}_k$ such that:

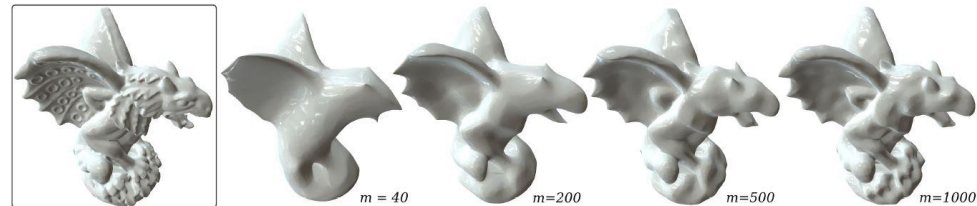
$$x = \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k H^k \quad (6)$$

Since the MHB is orthonormal, we can easily project (5) and (6) onto each $H^{k'}$ with the inner product:

フーリエ展開のようなもの

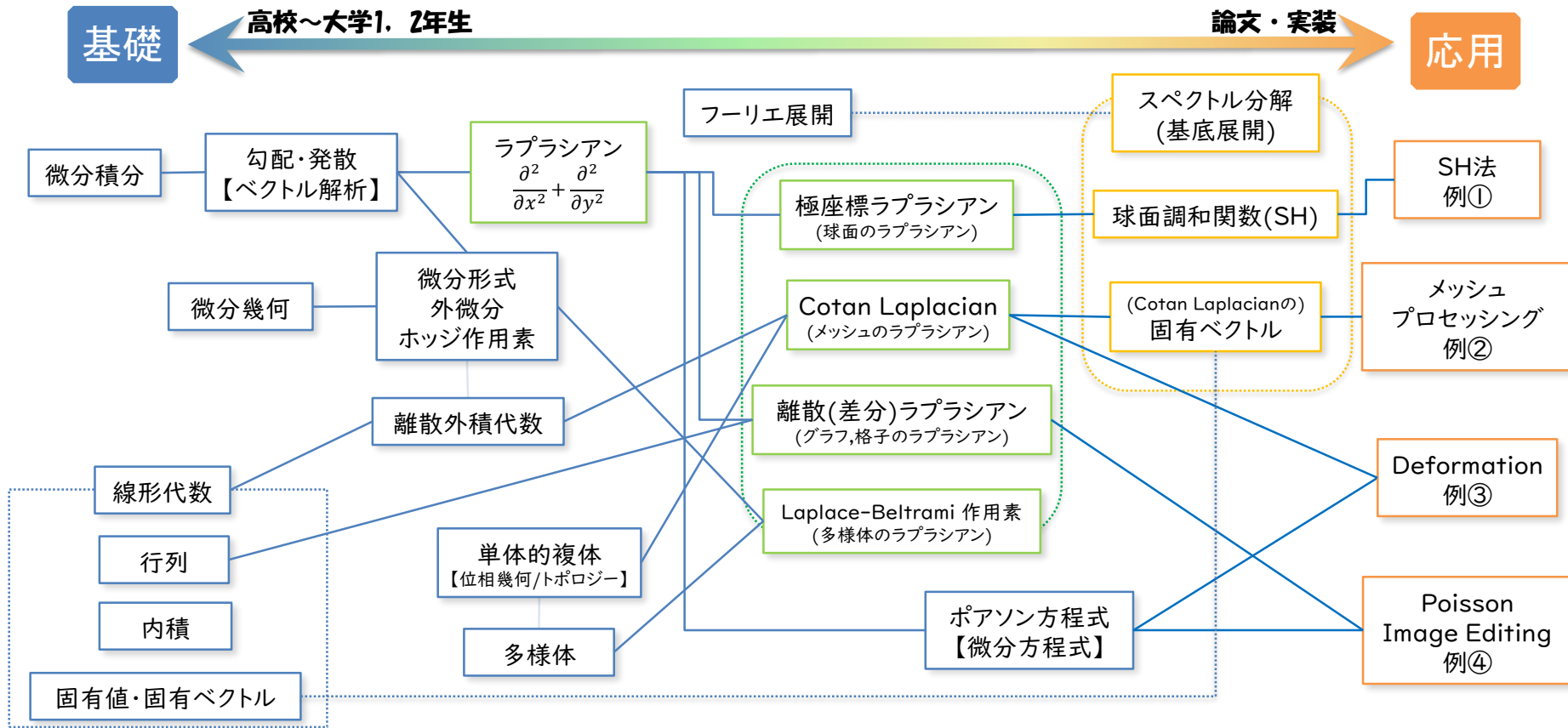


↑各固有ベクトルが
周波数成分に対応している



高周波を削ると、細かい凹凸が消える

ロードマップ【高校数学～ラプラシアン】



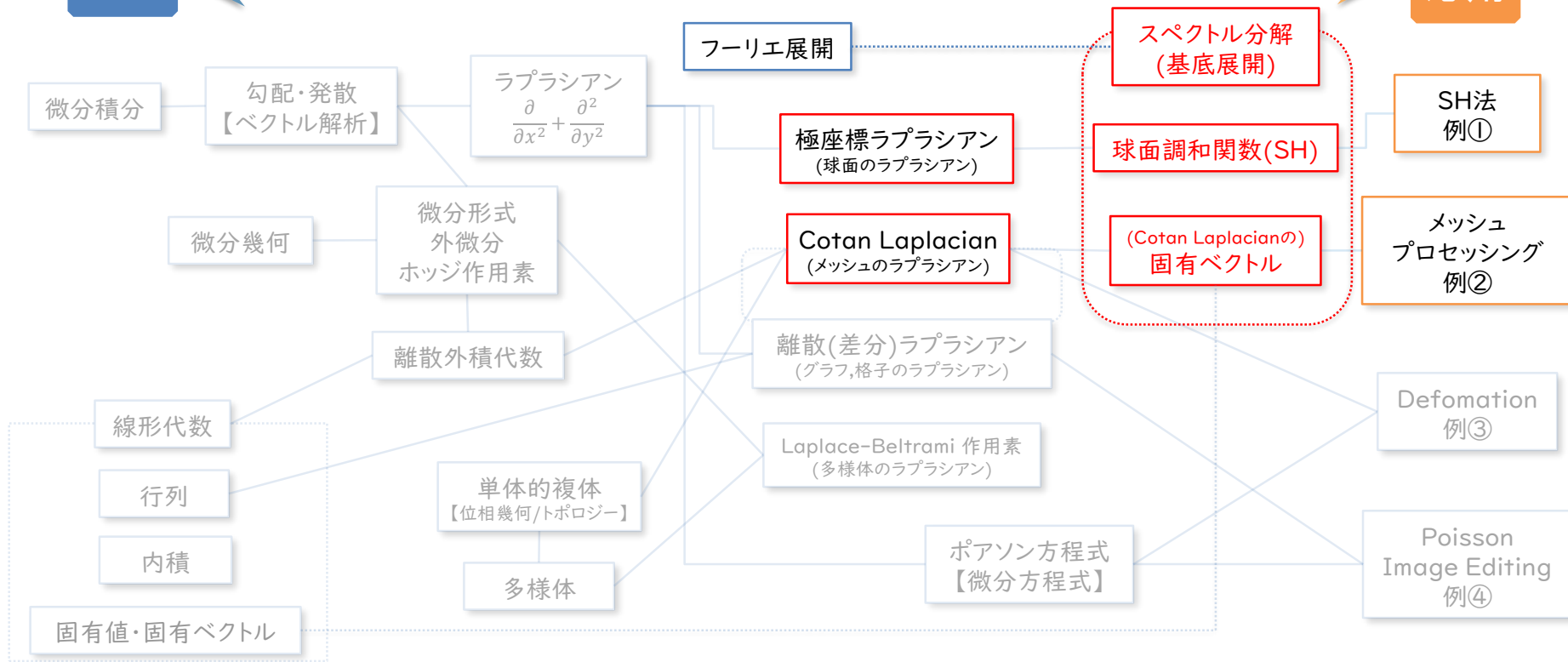
ロードマップ【高校数学～ラプラシアン】

基礎

高校～大学1, 2年生

論文・実装

応用



ラプラシアンの「心」

ラプラシアン的心が分かると
どの技術も同じ発想で生まれることが分かる！

画像のフーリエ変換

二次元のデータ点である画像をフーリエ変換すると

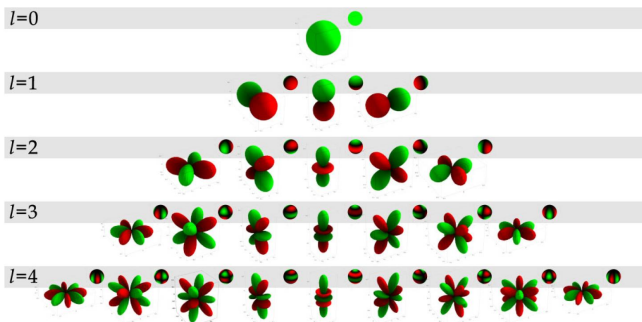
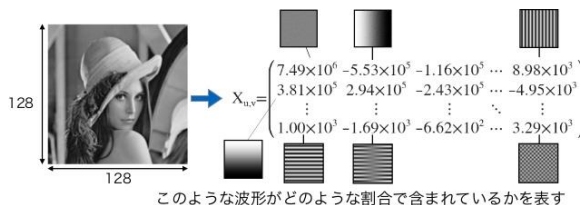
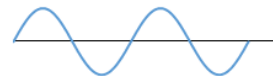
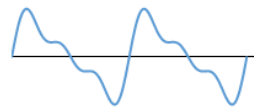


Figure 5. The first 5 SH bands plotted as unsigned spherical functions by distance from the origin and by colour on a unit sphere. Green (light gray) are positive values and red (dark gray) are negative.

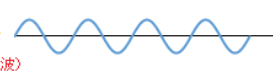
純音A(周波数A)



複合音



純音B(周波数B)



純音(正弦波)
に分解

純音C(周波数C)

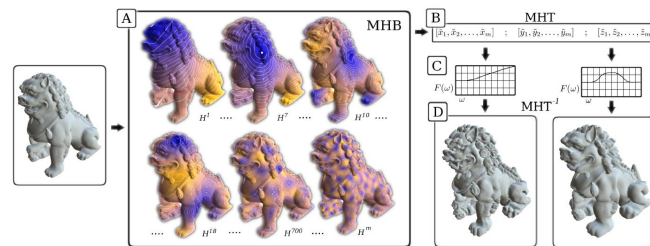
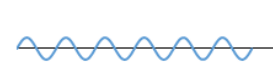


Figure 1: Processing pipeline of our method: A: Compute the Manifold Harmonic Basis (MHB) of the input triangulated mesh. B: Transform the geometry into frequency space by computing the Manifold Harmonic Transform (MHT). C: Apply the frequency space filter on the transformed geometry. D: Transform back into geometric space by computing the inverse MHT.

まとめ

一般論

ラプラシアンを例に ケーススタディ

導入

- ラプラシアンの利用例

課題

- 独学の難しさ
- 数式の行間

- 独学で理解できるか？
- なぜラプラシアンを利用？

学び方

- 前提知識とは？
- 前提知識の調べ方

- 論文を実装・応用してみる

行間

- 一般化

- 定義域毎のラプラシアン
- ラプラシアンの「心」